Le thème d'une période évanescente

Daniel Barlet

Le thème d'une période évanescente.

Daniel Barlet[*]

28/11/09 corrigée.

Abstract.

In this article we study holomorphic deformations of the filtered Gauss-Manin systems associated to a vanishing period integral. For that purpose we introduce a new sub-class of the class of monogenic (a,b)-modules (Brieskorn modules) which was studied in our previous article [B. 09]. We show that these new objects, called "themes", have good functorial properties and that there exists a canonical order on the roots of the corresponding Bernstein polynomial.
We construct, for given fundamental invariants, a finite dimensional versal holomorphic family and we show that, when all themes with these fundamental invariants are "stable", this versal family is in fact universal. We also give a sufficient condition on the roots of the Bernstein polynomial in order that the previous condition is satisfied. We show with an example that a universal family may not exist for some values of the fundamental invariants.

KEY WORDS. Vanishing period, Berstein polynomial, filtered Gauss-Manin system, (a,b)-module, Brieskorn module.

AMS CLASSIFICATION 2000. 32S05, 32S25, 32S40.

Contents

1 Décomposition primitive. 4
- 1.1 Rappels. 4
- 1.2 Exposants. 6
- 1.3 Les (a,b)-modules $[\Lambda]-$primitifs. 7

[*]Barlet Daniel, Institut Elie Cartan UMR 7502
Nancy-Université, CNRS, INRIA et Institut Universitaire de France,
BP 239 - F - 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex.France. r
e-mail : barlet@iecn.u-nancy.fr

2 Thèmes. **10**
2.1 Définition et stabilité par quotient et dualité. 10
2.1.1 Définition et exemples. 10
2.1.2 Quotient et dual d'un thème. 12
2.2 Structure des thèmes $[\lambda]-$primitifs. 17
2.2.1 Le théorème de structure. 17
2.2.2 Bases standards. 18

3 Endomorphismes et thèmes stables. **19**
3.1 Injections entre deux thèmes primitifs de même rang. 19
3.2 Thèmes primitifs stables. 23
3.3 Forme canonique pour un thème primitif. 27
3.3.1 Supplémentaires. 27
3.3.2 Unicité dans le cas stable. 29
3.3.3 La propriété d'unicité. 30
3.4 Thèmes stables généraux. 33

4 Familles holomorphes de thèmes $[\lambda]-$primitifs. **35**
4.1 Définitions et premiers exemples. 35
4.1.1 Définitions. 35
4.1.2 Premiers exemples : Famille holomorphes de thèmes $[\lambda]-$primitifs de rang 1 et 2. 38
4.1.3 Critère d'holomorphie. 41
4.1.4 Le théorème de dualité. 44
4.2 Familles standards de thèmes $[\lambda]-$primitifs. 45
4.3 Les déformations standards sont verselles. 46
4.4 Un contre-exemple. 49

5 Appendices. **52**
5.1 Un lemme. 52
5.2 Exemple 53
5.3 Existence d'applications k-thématiques. 55

6 Références. **57**

Introduction.

Mon article précédent [B.09] est focalisé sur les (a,b)-modules monogènes dans l'idée d'étudier, pour un élément x donné dans un (a,b)-module régulier, ou de manière plus géométrique, pour une forme holomorphe donnée dont on veut étudier la période évanescente (voir [A-G-V], [M. 75], [S. 89]), le sous-(a,b)-module engendré par x. Concrètement cela signifie que l'on se concentre sur l'équation différentielle (filtrée) minimale satisfaite par les fonctions obtenues par intégration de cette forme sur les cycles évanescents.

Le présent article se consacre à l'étude plus précise d'une intégrale de période évanescente, ce qui revient cette fois à fixer la classe d'homologie évanescente sur laquelle on intègre. Ceci conduit à une sous-classe intéressante des (a,b)-modules monogènes réguliers étudiés dans [B.09] qui est caractérisée par une propriété algébrique remarquable et simple dans le cas $[\lambda]-$primitif : "L'unicité de la suite de Jordan-Hölder".
Les éléments de cette sous-classe que j'ai appelés des **thèmes** correspondent en fait à la construction "naïve" suivante :
Considérons un sous-ensemble fini $\Lambda \subset]0,1] \cap \mathbb{Q}$ (réduit à $\{\lambda\}$ dans le cas $[\lambda]-$primitif) et un entier N, et considérons l'espace des séries formelles

$$\Xi_\Lambda^{(N)} := \sum_{\lambda\in\Lambda, j\in[0,N]} \mathbb{C}[[s]].s^{\lambda-1}\frac{(Log\, s)^j}{j!}.$$

Définissons la $\mathbb{C}-$algèbre non commutative $\tilde{\mathcal{A}}$ en posant

$$\tilde{\mathcal{A}} := \{\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(a).b^\nu, \quad P_\nu \in \mathbb{C}[x]\}$$

avec la relation de commutation $a.b - b.a = b^2$.
On a une action naturelle de $\tilde{\mathcal{A}}$ sur $\Xi_\Lambda^{(N)}$ via les actions données respectivement par la multiplication par s $(a := \times s)$ et et l'intégration sans constante ($b := \int_0^s$).
Un thème sera alors un sous$-\tilde{\mathcal{A}}-$module monogène d'un tel $\Xi_\Lambda^{(N)}$ c'est-à-dire le sous$-\tilde{\mathcal{A}}-$module à gauche engendré par un élément $\varphi \in \Xi_\Lambda^{(N)}$.
En présence d'un (a,b)-module géométrique E et d'une application (a,b)-linéaire $\Gamma : E \to \Xi_\Lambda^{(N)}$ l'image par Γ du (a,b)-module monogène $\tilde{\mathcal{A}}.x$ engendré par x dans E, sera un thème.
Par exemple si E est le complété formel en f du module de Brieskorn d'un germe de fonction f holomorphe à singularité isolée dans $\mathbb{C}^{n+1}$ l'application (a,b)-linéaire $\Gamma : E \to \Xi_\Lambda^{(N)}$ associée à un cycle évanescent γ qui fait correspondre à $[\omega]$ le développement asymptotique (formel) de la fonction multiforme de détermination finie $s \to \int_{\gamma_s} \omega/df$, où $(\gamma_s)_{s\in D^*}$ désigne la famille horizontale multiforme associée à γ dans les fibres de f, et où l'on a choisi convenablement Λ et N.

Le polynôme de Bernstein d'un (a,b)-module monogène régulier étant décrit en terme du générateur de l'idéal annulateur d'un générateur du (a,b)-module monogène considéré, nous proposons dans cet article d'étudier les invariants (numériques) plus fins que le polynôme de Bernstein d'un thème. En fait nous décrirons tous les invariants associés à une classe d'isomorphisme de thème primitif. Pour ce faire nous étudierons les familles holomorphes de thèmes, ce qui correspond à l'étude d'une période évanescente dépendant holomorphiquement d'un paramètre. Par exemple ce phénomène apparaît dans le cas d'une famille à μ constant de fonctions holomorphes à singularités isolées, quand on considère une forme holomorphe (relative) et une classe d'homologie fixée dans une fibre lisse.

Notre objectif principal sera de décrire concrètement des familles holomorphes **verselles** (et "minimales") pour les thèmes $[\lambda]-$primitifs. Nous montrerons que dans le "cas stable", le seul où l'on peut espérer en général l'existence d'une famille universelle, les familles décrites sont effectivement universelles.

Les principaux résultats de ce travail sont les suivants.

1. Les théorèmes 2.1.4 et 2.1.10 de stabilité des thèmes par quotient et dualité "tordue" qui permettront de montrer qu'un(a,b)-module monogène est un thème si et seulement pour chacun de ses exposants $[\lambda]$ sa partie $[\lambda]-$primitive est un thème 2.1.11.

2. La caratérisation des thèmes stables et le théorème d'unicité 3.3.3 de l'écriture du générateur de l'idéal annulant un générateur standard dans le cas d'un thème primitif stable. Ceci donne l'universalité de la famille standard quand elle ne contient que des thèmes stables. Une condition suffisante simple (voir le corollaire 3.1.4) sur les invariants fondamentaux donnée au théorème 3.1.2 permet d'assurer que c'est souvent le cas.

3. L'existence des bases standards qui donneront la construction de familles verselles de thèmes $[\lambda]-$primitifs, une fois fixés les invariants fondamentaux.

4. Nous terminons par un exemple en rang 3 pour lequel nous montrons qu'il n'existe pas de famille universelle au voisinage de chaque thème stable ayant ces invariants fondamentaux. Ces thèmes stables sont paramétrés dans cet exemple par une hypersurface (non vide) de la famille standard.
   Par contre, une fois enlever cette hypersurface, on peut construire une famille qui est universelle au voisinage de chacun de ses points et paramètre tous les thèmes instables ayant ces invariants fondamentaux.

1 Décomposition primitive.

1.1 Rappels.

Soit A le quotient de l'algèbre libre $\mathbb{C} < a, b >$ par l'idéal bilatère engendré par $a.b - b.a - b^2$. On notera que pour chaque $k \in \mathbb{N}$ $b^k.A = A.b^k$ est un idéal bilatère de A. Soit $\tilde{\mathcal{A}}$ la complétée $b-$adique de A. On a alors

$$\tilde{\mathcal{A}} := \{\sum_{\nu \geq 0} P_\nu(a).b^\nu, P_\nu \in \mathbb{C}[x]\}.$$

C'est une $\mathbb{C}-$algèbre unitaire intègre qui contient la sous-algèbre commutative $\mathbb{C}[[b]]$. On appelle (a,b)-module E un $\tilde{\mathcal{A}}-$module à gauche qui est libre de type fini sur $\mathbb{C}[[b]]$. Se donner un (a,b)-module équivaut à la donnée d'un $\mathbb{C}[[b]]-$module libre de rang fini E et d'une application $\mathbb{C}-$linéaire $a : E \to E$ vérifiant la relation de commutation $a.b - b.a = b^2$; elle est continue pour la topologie $b-$adique de E.

Une telle application $\mathbb{C}-$linéaire a est déterminée de façon unique par les valeurs de a sur une $\mathbb{C}[[b]]-$base de E, et elles peuvent être choisies arbitrairement dans E : en effet, si $E := \oplus_{j=1}^k \mathbb{C}[[b]].e_j$ et si on s'est donné arbitrairement des éléments $x_1, \dots, x_k$ dans E, l'application a associée est bien définie sur $E_0 := \oplus_{j=1}^k \mathbb{C}[b].e_j$ par les relations

$$a.b^n.e_j = b^n.x_j + n.b^{n+1}.e_j \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall j \in [1,k]$$

qui sont conséquences de $a.b - b.a = b^2$ et de $a.e_j = x_j \quad \forall j \in [1,k]$. L'application a se prolonge alors de façon unique à E par continuité.

On dit que le (a,b)-module E est **à pôle simple** si on a $a.E \subset b.E$.
On dit que E est **régulier** s'il se plonge dans un (a,b)-module à pôle simple. Dans ce cas le plus petit (a,b)-module à pôle simple contenant E est le saturé

$$E^\sharp \subset E[b^{-1}] := E \otimes_{\mathbb{C}[[b]]} \mathbb{C}[[b]][b^{-1}]$$

de E par $b^{-1}.a$. La régularité de E est équivalente à la finitude sur $\mathbb{C}[[b]]$ de ce saturé

$$E^\sharp = \sum_{j\geq 0} (b^{-1}.a)^j.E \subset E[b^{-1}].$$

Pour E à pôle simple on définit le **polynôme de Bernstein** de E, noté B_E, comme le polynôme minimal de $-b^{-1}.a$ agissant sur l'espace vectoriel de dimension finie $E\big/b.E$.
Plus généralement, le polynôme de Bernstein d'un (a,b)-module régulier E est défini comme le polynôme de Bernstein de son saturé par $b^{-1}.a$. Donc $B_E := B_{E^\sharp}$.

On dit qu'un (a,b)-module régulier est **géométrique** si toutes les racines de son polynôme de Bernstein sont des rationnels strictement négatifs.

Si E et F sont deux (a,b)-modules, on définit leur produit tensoriel $E \otimes_{a,b} F$ en considérant le produit tensoriel des deux $\mathbb{C}[[b]]-$modules correspondants (qui est bien libre de type fini sur $\mathbb{C}[[b]]$), et en définissant $a : E \otimes_{a,b} F \to E \otimes_{a,b} F$ par la formule

$$a(e \otimes f) := (a.e) \otimes f + e \otimes (a.f).$$

On vérifie alors facilement que l'on a bien $a.b - b.a = b^2$.
De même, si E et F sont deux (a,b)-modules, on définit $Hom_{a,b}(E,F)$ en considérant le $\mathbb{C}[[b]]-$module $Hom_b(E,F)$ des applications $\mathbb{C}[[b]]-$linéaires de E dans F et en définissant, pour $\varphi \in Hom_b(E,F)$ et $x \in E$:

$$(a.\varphi)(x) := a.\varphi(x) - \varphi(a.x) \tag{1}$$

on a alors la $\mathbb{C}[[b]]-$linéarité de $(a.\varphi)$ et l'identité $(a.b - b.a).\varphi = b^2.\varphi$.

On appellera dual de E le (a,b)-module $Hom_{a,b}(E, E_0)$ où $E_0 := \tilde{\mathcal{A}}\big/\tilde{\mathcal{A}}.a$ est le (a,b)-module de rang 1 , de générateur e_0 vérifiant $a.e_0 = 0$. Le lecteur vérifiera facilement que pour $\lambda \in \mathbb{C}$ le dual de $E_\lambda := \tilde{\mathcal{A}}\big/\tilde{\mathcal{A}}.(a - \lambda.b)$, est $(E_\lambda)^* \simeq E_{-\lambda}$. On peut facilement en déduire que pour E régulier on a canoniquement $(E^*)^* \simeq E$.

Exemple. Si E est un (a,b)-module et si E_δ est le (a,b)-module de rang 1 et de générateur e_δ tel que $a.e_\delta = \delta.b.e_\delta$ (donc $E_\delta \simeq \tilde{\mathcal{A}}\big/\tilde{\mathcal{A}}.(a-\delta.b)$), le (a,b)-module $E \otimes_{a,b} E_\delta$ peut être identifié au $\mathbb{C}[[b]]-$module E dans lequel on a défini l'action de "a" par $\tilde{a} := a + \delta.b$.
On remarquera que pour chaque $\delta \in \mathbb{C}$ il existe un unique automorphisme d'algèbre unitaire θ_δ de $\tilde{\mathcal{A}}$ envoyant a sur $a+\delta.b$ et b sur b. On peut donc voir $E \otimes_{a,b} E_\delta$ comme le $\tilde{\mathcal{A}}-$module obtenu en faisant agir $\tilde{\mathcal{A}}$ sur E via $(\alpha, x) \mapsto \theta_\delta(\alpha).x$.

1.2 Exposants.

Définition 1.2.1 *Soit E un (a,b)-module régulier. On notera $Exp(E) \subset \mathbb{C}\big/\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes modulo $\mathbb{Z}$ des nombres $-\alpha$ où α décrit l'ensemble des racines du polynôme de Bernstein B_E de E.*

On a donc toujours $Exp(E) = Exp(E^\sharp)$, puisque, par définition $B_E = B_{E^\sharp}$.

Remarques.

1) On notera que $[\lambda]$ est dans $Exp(E)$ si et seulement s'il existe $\lambda \in [\lambda]$ et une injection (a,b)-linéaire de E_λ dans E. En effet, il suffit de prouver cette assertion pour $E^\sharp$, et dans ce cas on peut prendre pour λ le plus petit élément de $[\lambda]$ pour lequel $a - \lambda.b$ n'est pas injectif, d'après la proposition 1.3 de [B.93].

2) Soit E^* le dual du (a,b)-module régulier E. Alors $Exp(E^*) = -Exp(E)$.

3) En utilisant la remarque précédente et l'isomorphisme de E avec son bi-dual, on voit que $[\lambda]$ est dans $Exp(E)$ si et seulement s'il existe $\lambda \in [\lambda]$ et une surjection (a,b)-linéaire de E dans E_λ. $\square$

Lemme 1.2.2 *Soit $0 \to F \to E \xrightarrow{\pi} G \to 0$ une suite exacte de (a,b)-modules réguliers. Alors on a l'égalité $Exp(E) = Exp(F) \cup Exp(G)$.*

Preuve. Soit $[\lambda] \in Exp(E)$. Alors il existe $\lambda \in [\lambda]$ et une injection (a,b)-linéaire $E_\lambda \hookrightarrow E$. Si on $\pi(E_\lambda) = \{0\}$ alors on a $E_\lambda \subset F$ et $[\lambda] \in Exp(F)$. Sinon, on a $\pi(E_\lambda) \simeq E_{\lambda+p}$ avec $p \in \mathbb{N}$, et on a donc $[\lambda] \in Exp(G)$.
Réciproquement montrons que $Exp(G) \subset Exp(E)$ puisque l'inclusion de $Exp(F)$ dans $Exp(E)$ est claire.
Soit $f : G \to E_\mu$ une application surjective. La composée $f \circ \pi$ est surjective ce qui montre que $[\mu] \in Exp(E)$, grâce à la remarque 3) ci-dessus. $\blacksquare$

Remarque. Une conséquence facile de ce lemme est que si on a deux sous-(a,b)-modules F et F' d'un (a,b)-module régulier E et si l'on a

$$[\lambda] \not\in Exp(F) \cup Exp(F')$$

alors $[\lambda]$ n'est pas dans $Exp(G)$ où G désigne le plus petit sous-module normal de E contenant $F + F'$. $\square$

1.3 Les (a,b)-modules $[\Lambda]-$primitifs.

Définition 1.3.1 *Soit* $\Lambda \subset \mathbb{C}/\mathbb{Z}$. *On dira qu'un (a,b)-module régulier* E *est* $[\Lambda]-$*primitif si toutes les racines du polynôme de Bernstein de* E *sont dans* $-\Lambda$, *c'est-à-dire si* $Exp(E) \subset \Lambda$.

Notations. Quand $\Lambda = \{[\lambda]\}$ nous dirons que E est $[\lambda]-$primitif.
Si M est le complémentaire de Λ dans $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ nous dirons que E est $[\neq \Lambda]-$primitif pour dire qu'il est $M-$primitif.

Remarques.

1. Avec notre définition le (a,b)-module nul est $\Lambda-$primitif pour tout choix de Λ. De plus c'est le seul (a,b)-module qui soit à la fois $\Lambda-$primitif et $[\neq \Lambda]-$primitif.

2. Une conséquence immédiate de la remarque 1) qui suit la définition 1.2.1 est que tout sous-(a,b)-module (normal ou non) d'un (a,b)-module $\Lambda-$primitif est $\Lambda-$primitif.

3. Si on a une suite exacte $0 \to F \to E \to G \to 0$ avec F et G $\Lambda-$primitifs, alors E est également $\Lambda-$primitif.
   Et réciproquement si E est $\Lambda-$primitif dans une suite exacte de (a,b)-modules, alors F et G le sont également.

4. Si $f : E \to F$ est une application $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaire entre (a,b)-modules réguliers et si $G \subset E$ est un sous-module $\Lambda-$primitif, alors $f(G)$ est $\Lambda-$primitif. En effet, sinon on peut trouver un sous-module isomorphe à E_μ dans $f(G)$ avec $\mu \notin \Lambda$ et donc un sous-module $H := G \cap f^{-1}(E_\mu)$ avec une suite exacte

$$0 \to Ker(f) \cap G \to H \xrightarrow{f} E_\mu \to 0$$

   ce qui contredit la remarque 3) précédente. $\square$

Proposition 1.3.2 *Soit* E *un (a,b)-module régulier et soit* $\Lambda \subset \mathbb{C}/\mathbb{Z}$. *Il existe un unique sous-(a,b)-module normal* $E[\Lambda] \subset E$ *qui est* $\Lambda-$*primitif et contient tout sous-module* $\Lambda-$*primitif de* E.

Preuve. Montrons l'assertion par récurrence sur le rang de E. Comme l'assertion est claire en rang 1, supposons l'assertion montrée en rang $\leq k-1$ avec $k \geq 2$ et montrons-la en rang k.
Si tout $[\lambda] \in -\Lambda$ n'est pas la classe modulo $\mathbb{Z}$ d'une racine du polynôme de Bernstein de E, il est clair que $\{0\}$ est le plus grand sous-(a,b)-module $\Lambda-$primitif de E.

Supposons donc qu'il existe une racine $-\lambda$ du polynôme de Bernstein de E telle que $\lambda \in \Lambda$. On peut alors trouver un sous-module normal de E isomorphe à $E_{\lambda'}$ avec $[\lambda'] = [\lambda]$ en normalisant l'image d'une injection $E_\lambda \hookrightarrow E$. On a alors la suite exacte

$$0 \to E_{\lambda'} \to E \xrightarrow{\pi} F \to 0$$

et F est de rang $k-1$. L'hypothèse de récurrence nous fournit un plus grand sous-module $\Lambda-$primitif $F[\Lambda]$ dans F qui est normal. Montrons qu'alors $\pi^{-1}(F[\Lambda])$ est le $E[\Lambda]$ cherché. D'abord il est normal dans E puisque $F[\Lambda]$ l'est dans F. De plus la suite exacte

$$0 \to E_{\lambda'} \to \pi^{-1}(F[\Lambda]) \xrightarrow{\pi} F[\Lambda] \to 0$$

montre qu'il est $\Lambda-$primitif d'après la remarque 3) ci-dessus.
Soit G un sous-module $\Lambda-$primitif de E. D'après la remarque 4) faite plus haut son image par π est $\Lambda-$primitive donc contenue dans $F[\Lambda]$, ce qui montre que G est bien contenu dans $\pi^{-1}(F[\Lambda])$. ■

Remarques.

1. On a $Exp(E[\Lambda]) = Exp(E) \cap \Lambda$.

2. Soit E un (a,b)-module régulier et $\Lambda \subset \mathbb{C}/\mathbb{Z}$. Pour $F \subset E$ un sous-(a,b)-module on a $F[\Lambda] = F \cap E[\Lambda]$. En effet l'inclusion de $F \cap E[\Lambda]$ dans $F[\Lambda]$ résulte de la maximalité de $F[\Lambda]$ puisque $F \cap E[\Lambda]$ est $\Lambda-$primitif. L'autre inclusion est évidente. □

Lemme 1.3.3 *Soit E un (a,b)-module régulier et $\Lambda \subset \mathbb{C}/\mathbb{Z}$. Définissons maintenant $E/[\Lambda] := E/E[\neq \Lambda]$. Alors $E/[\Lambda]$ est $\Lambda-$primitif et tout (a,b)-module quotient $\Lambda-$primitif de E est canoniquement un quotient de $E/[\Lambda]$.*

Preuve. Soit $\mu \in \Lambda$ et considérons une surjection $E \xrightarrow{\pi} E_\mu$. La restriction de π à $E[\neq \Lambda]$ est soit nulle, soit d'image $E_{\mu+p}$ pour un $p \in \mathbb{N}$. Mais ce second cas est exclu car il impliquerait que $[\mu] \in Exp(E[\neq \Lambda])$, contredisant la remarque 1) ci-dessus. On a donc $Exp(E[\neq \Lambda]) = Exp(E) \setminus \Lambda$.
Supposons maintenant que $F \subset E$ est un sous-(a,b)-module normal tel que E/F soit $\Lambda-$primitif. Comme on a $F[\neq \Lambda] = F \cap E[\neq \Lambda]$ d'après la remarque 2) précédente, on aura une injection de $E[\neq \Lambda]/F[\neq \Lambda]$ dans E/F qui est supposé $\Lambda-$primitif. On en déduit que $E[\neq \Lambda]/F[\neq \Lambda]$ est nul d'après les remarques 1 et 4 qui suivent la définition 1.3.1. Donc $E[\neq \Lambda] \subset F$ et E/F est un quotient de $E/[\Lambda]$. ■

Définition 1.3.4 *Nous appellerons partie $\Lambda-$coprimitive de E le quotient $E/[\Lambda]$ introduit au lemme précédent.*

Remarques.

1. Soit $0 \to F \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} G \to 0$ une suite exacte de (a,b)-modules réguliers. Pour tout $\Lambda \subset \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ on a la suite exacte :
$$0 \to F[\Lambda] \xrightarrow{f} E[\Lambda] \xrightarrow{g} G[\Lambda].$$
On n'a pas exactitude à droite en général, ce que l'on peut déjà vérifier sur la suite exacte[1]
$$0 \to E_\mu \to E_{\lambda,\mu} \to E_{\lambda-1} \to 0$$
avec $\Lambda = \{\lambda\}$ en supposant que $\mu \not\in [\lambda]$.

2. Soit E un (a,b)-module régulier et $\Lambda \subset \mathbb{C}/\mathbb{Z}$. On a une flèche naturelle
$$E[\Lambda] \to E/[\Lambda]$$
donnée par composition de l'inclusion $E[\Lambda] \hookrightarrow E$ et du quotient $E \to E/[\Lambda]$. Cette flèche est injective, mais pas surjective en général. En effet l'injectivité résulte de l'égalité $E[\Lambda] \cap E[\neq \Lambda] = \{0\}$. Elle n'est pas surjective déjà pour $E_{\lambda,\mu}$ si $[\lambda] \neq [\mu]$ et $\Lambda = [\lambda]$ puisque $E[\Lambda] = E_\lambda$ et $E/[\Lambda] = E_{\lambda-1}$ dans ce cas. En général, on a donc $E[\Lambda] \oplus E[\neq \Lambda] \neq E$. □

Corollaire 1.3.5 *Soit E un (a,b)-module régulier, et soient $Exp(E) := \{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$, avec $[\lambda_i] \neq [\lambda_j]$ pour $i \neq j$, et rangés dans un ordre arbitraire. Alors on a une suite de composition unique (une fois l'ordre des $[\lambda_j]$ fixé)*
$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_d = E$$
de sous-modules normaux de E tels que F_j/F_{j-1} soient $[\lambda_j]-$primitifs pour chaque $j \in [1, d]$.

Preuve. La récurrence est immédiate en posant $F_j := E[\{\lambda_1, \dots, \lambda_j\}]$. ■

On prendra garde que, en général, pour $j \geq 2$, le quotient F_j/F_{j-1} n'est pas isomorphe à $E[\lambda_j]$, comme le montre l'exemple du (a,b)-module de rang 2 $E_{\lambda,\mu}$ quand $[\lambda] \neq [\mu]$.

[1] Rappelons que $E_{\lambda,\mu}$ est le (a,b)-module de rang 2 où a est défini par
$$a.e_1 = e_2 + (\lambda - 1).b.e_1 \quad a.e_2 = \mu.b.e_2.$$

Corollaire 1.3.6 *Soit E un (a,b)-module régulier et soit $\Lambda \subset \mathbb{C}/\mathbb{Z}$. La dualité des (a,b)-modules transforme la suite exacte*

$$0 \to E[\Lambda] \to E \to E/E[\Lambda] \to 0$$

en la suite exacte

$$0 \to E^*[\neq -\Lambda] \to E^* \to (E[\Lambda])^* \to 0$$

ce qui montre que l'on a un isomorphisme canonique $(E[\Lambda])^* \simeq E^*/[-\Lambda]$.

Preuve. Le dual d'un (a,b)-module $\Lambda-$primitif est $[-\Lambda]-$primitif. Donc la propriété universelle de l'inclusion $E[\Lambda] \hookrightarrow E$ vis à vis des applications $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaires dans E de modules $\Lambda-$primitifs donne par dualité que la surjection $E^* \to (E[\Lambda])^*$ factorise toute application $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaire de E^* dans un (a,b)-module $[-\Lambda]-$primitif. Donc $(E[\Lambda])^*$ est la partie $\Lambda-$coprimitive de E^*. Ceci montre que le noyau de ce quotient est la partie primitive de E^* pour $[\neq -\Lambda]$. ■

Une conséquence simple de ce corollaire, puisque le dual d'un (a,b)-module monogène régulier est monogène régulier (voir [B.09]), est que la partie $\Lambda-$primitive d'un (a,b)-module monogène régulier est encore un (a,b)-module monogène régulier.
En effet l'aspect monogène est clair pour la partie coprimitive, le corollaire ci-dessus donne alors cette assertion par dualité.

2 Thèmes.

2.1 Définition et stabilité par quotient et dualité.

2.1.1 Définition et exemples.

Notations. Soit $\Lambda \subset]0,1] \cap \mathbb{Q}$ un sous-ensemble fini et N un entier. Nous considèrerons le $\mathbb{C}[[b]]-$module libre de type fini

$$\Xi_\Lambda^{(N)} := \sum_{\lambda \in \Lambda, j \in [0,N]} \mathbb{C}[[b]].s^{\lambda-1}.\frac{(Log s)^j}{j!} \qquad (@)$$

muni de la structure de $\tilde{\mathcal{A}}-$module (à gauche) donnée par l'application $\mathbb{C}-$linéaire a qui est la multiplication par s, la notation des générateurs correspondant au fait que l'on interprète b comme l'intégration sans constante. Ceci correspond à l'égalité

$$\Xi_\Lambda^{(N)} = \sum_{\lambda \in \Lambda, j \in [0,N]} \mathbb{C}[[s]].s^{\lambda-1}.\frac{(Log s)^j}{j!}.$$

Nous noterons ausssi Ξ la somme de de tous les $\Xi_\lambda^{(N)}$ pour tous les $\lambda \in]0,1] \cap \mathbb{Q}$ et tous les entiers N.

Définition 2.1.1 *Nous dirons qu'un (a,b)-module monogène est un* **thème** *s'il est isomorphe à un sous-(a,b)-module (nécessairement monogène) de $\Xi_\Lambda^{(N)}$.*

Remarques.

1) On notera déjà qu'un thème est toujours, par définition, un (a,b)-module monogène **géométrique**.

2) Le thème E est $[\lambda]-$primitif s'il est isomorphe à un sous-module de

$$\Xi_{\lambda}^{(N)} := \sum_{j\in[0,N]} \mathbb{C}[[b]].s^{\lambda-1}.\frac{(Logs)^j}{j!}$$

pour $N \in \mathbb{N}$ assez grand, où λ est dans $\mathbb{Q}\cap]0,1]$. □

Remarque. En rang 1 tout (a,b)-module géométrique est un thème, puisque pour $\lambda \in \mathbb{Q}^{+*}$ on a $E_\lambda \simeq \mathbb{C}[[b]].s^{\lambda-1} \subset \Xi$. □

Lemme 2.1.2 *Un thème $[\lambda]-$primitif de rang 2 est isomorphe soit à $E_{\lambda,\lambda}$ soit à $E_{\lambda+n,\lambda}(\alpha)$ avec $\lambda \in 1+\mathbb{Q}^{*+}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}^*$, c'est à dire isomorphe soit à $\tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.(a-\lambda.b).(a-(\lambda-1).b)$ soit à $\tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.P_{n,\alpha}$ avec*

$$P_{n,\alpha} := (a-\lambda.b).(1+\alpha.b^n)^{-1}.(a-(\lambda+n-1).b).$$

En particulier il contient un unique sous-module normal de rang 1 qui est isomorphe à E_λ.

Preuve. Dans la classification des (a,b)-modules réguliers de rang 2 donnée dans la proposition 2.4 de [B.93] p.34 on constate que les deux premiers types ne sont pas monogènes (car ils sont à pôle simple). Le quatrième type est le second cas donné dans l'énoncé. Il se plonge dans $\Xi_\lambda^{(1)}$ pour $\lambda \in 1+\mathbb{Q}^{*+}$ sous la forme $\tilde{\mathcal{A}}.\psi$ où

$$\psi := s^{\lambda+n-2}.Logs + \gamma.s^{\lambda-2}$$

avec

$$\gamma = -\frac{(\lambda-1).\lambda\ldots(\lambda+n-2)}{n}.$$

Montrons qu'un (a,b)-module de rang deux primitif du troisième type n'est un thème que dans le cas $E_{\lambda,\lambda}$. Montrons donc que $E := E_{\lambda,\lambda+p}$ avec $\lambda \in \mathbb{Q}^{*+}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ n'est pas un thème. Raisonnons par l'absurde : si c'était le cas, on aurait un plongement de $E_{\lambda,\lambda+p}$ dans $\Xi_\lambda^{(N)}$ et donc si l'on considère la $\mathbb{C}[[b]]-$base standard de $E_{\lambda,\lambda+p}$ donnée par $a.e_1 = e_2 + (\lambda-1).b.e_1$ et $a.e_2 = (\lambda+p).b.e_2$, l'image de e_2 par ce plongement serait égale à $c.s^{\lambda+p-1}$ avec $c \in \mathbb{C}^*$. Soit F l'image de $b.e_1$ par ce plongement. On aura alors

$$s.\frac{dF}{ds} = c.s^{\lambda+p-1} + (\lambda-1).F$$

et la resolution de cette équation différentielle donne $F(s) = \frac{c}{p}.s^{\lambda+p-1} + \gamma.s^{\lambda-1}$. Pour $\lambda \in]0,1]$ ceci impose $\gamma = 0$, puisque $F \in b\Xi_\lambda^{(N)}$. On en déduit que l'image dans Ξ de $E_{\lambda,\lambda+p}$ est de rang 1 et égale à $\mathbb{C}[[b]].s^{\lambda-2}$ pour $\lambda > 1$ et à $\mathbb{C}[[b]].s^{\lambda+p-1}$ pour $\lambda \in]0,1]$. Ceci montre notre assertion.
Par ailleurs on vérifie facilement que $\tilde{\mathcal{A}}.\varphi$ avec $\varphi := s^{\lambda-2}.Logs$ est bien un plongement de $E_{\lambda,\lambda}$ dans Ξ pour $\lambda \in 1 + \mathbb{Q}^{*+}$.
L'unicité du sous-module normal de rang 1 pour les deux cas considérés s'obtient facilement par un calcul direct ; le lecteur pourra aussi se reporte à [B.93]. ■

REMARQUE. On notera que dans tous les cas la suite de Jordan-Hölder d'un thème de rang 2 vérifie l'inégalité $\lambda_1 \leq \lambda_2 - 1$. On a même $\lambda_1 \leq \lambda_2$ sauf dans le cas de $E_{\lambda,\lambda}$. □

2.1.2 Quotient et dual d'un thème.

La proposition suivante est la clef du théorème de stabilité des thèmes par quotient.

Proposition 2.1.3 *Soit E un thème $[\lambda]$ primitif non nul. Alors E admet un unique sous-module normal de rang 1. Si $E_\lambda \subset E$ est ce sous-module normal, le quotient $E\big/E_\lambda$ est un thème $[\lambda]-$primitif.*

PREUVE. L'existence des suites de Jordan-Hölder pour les (a,b)-modules réguliers montre qu'il existe au moins un sous-(a,b)-module normal de rang 1 dans E, et comme E est $[\lambda]-$primitif, il est isomorphe à E_{λ_1} où $\lambda_1 \in [\lambda]$.
Supposons que l'on dispose de deux sous-modules normaux, notés respectivement $G_1 \simeq E_{\lambda_1}$ et $G_2 \simeq E_{\lambda_2}$. Posons $G := G_1 + G_2$, et montrons que G est nécessairement de rang 2 si l'on suppose $G_1 \neq G_2$.
En effet si G est de rang 1 il est isomorphe à E_λ et on a nécessairement $G_1 = b^p.G$ et $G_2 = b^q.G$. Mais la normalité de G_1 et G_2 donne $p = q = 0$, c'est à dire $G = G_1 = G_2$.
Donc G est un thème $[\lambda]-$primitif de rang 2. Mais on a vu qu'un thème $[\lambda]-$primitif de rang 2 n'admet qu'un unique sous-module normal de rang 1. Donc on a $G_1 = G_2$, puisque la normalité de G_i dans E implique sa normalité dans G; ceci prouve l'unicité.
Pour montrer que le quotient $E\big/E_\lambda$ est un thème, commençons par montrer que l'on a pour chaque $\lambda \in]0,1] \cap \mathbb{Q}$ une suite exacte de $\tilde{\mathcal{A}}-$modules à gauche

$$0 \to \mathbb{C}[[b]].s^{\lambda-1} \to \Xi_\lambda^{(N)} \xrightarrow{f_\lambda} \Xi_\lambda^{(N-1)} \to 0$$

où $N \in \mathbb{N}^*$ et où l'on rappelle que

$$\Xi_\lambda^{(N)} := \sum_{j\in[0,N]} \mathbb{C}[[b]].s^{\lambda-1}.\frac{(Logs)^j}{j!}.$$

Définissons l'application $\mathbb{C}[[b]]-$linéaire f_λ en posant

$$f_\lambda(s^{\lambda-1}) = 0 \qquad \text{et}$$
$$f_\lambda(s^{\lambda-1}.\frac{(Logs)^j}{j!}) = s^{\lambda-1}.\frac{(Logs)^{j-1}}{(j-1)!} \quad \text{pour } j \geq 1.$$

On vérifie alors que l'on a $f_\lambda(a.s^{\lambda-1}.\frac{(Logs)^j}{j!}) = a.f(s^{\lambda-1}.\frac{(Logs)^j}{j!})$ en utilisant la $\mathbb{C}[[b]]-$linéarité de f_λ et les relations

$$a.s^{\lambda-1}.\frac{(Logs)^j}{j!} = \lambda.b.s^{\lambda-1}.\frac{(Logs)^j}{j!} + b(s^{\lambda-1}.\frac{(Logs)^{j-1}}{(j-1)!})$$

pour $j \geq 1$ et $a.s^{\lambda-1} = \lambda.b.s^{\lambda-1}$ pour $j = 0$. Le fait que f_λ soit surjective et de noyau $\mathbb{C}[[b]].s^{\lambda-1}$ est alors immédiat.

Considérons alors un thème $[\lambda]-$primitif $E \hookrightarrow \Xi_\lambda^{(N)}$, et soit F son unique sous-module normal de rang 1. Il s'envoie bijectivement sur $\mathbb{C}[[b]].s^{\lambda+p-1}$ pour un entier $p \geq 0$, par l'injection de E dans $\Xi_\lambda^{(N)}$. Montrons qu'il est égal à $E \cap Ker(f_\lambda)$.
En effet il est contenu dans $Ker(f_\lambda)$ d'après ce qui précède, et si $x \in Ker(f_\lambda) \cap E$, on a $x = S(b).s^{\lambda-1}$. Notons q la valuation de $S \in \mathbb{C}[[b]] \setminus \{0\}$ (le cas $x = 0$ est clair). Si on a $q < p$, alors $s^{\lambda+q-1} \in E$, puisque E est un $\mathbb{C}[[b]]-$sous-module, et on obtient ainsi un élément y de E tel que $b^{p-q}.y \in F$. Comme F est normal, on a $y \in F$, ce qui est contredit l'hypothèse $q < p$. Donc $S(b) \in b^p.\mathbb{C}[[b]]$ et $x \in F$.
Donc le noyau de f_λ restreinte à E est F et donc f_λ induit une injection (a,b)-linéaire de $E\big/F$ dans $\Xi_\lambda^{(N-1)}$. Donc $E\big/F$ est un thème $[\lambda]-$primitif. ■

Théorème 2.1.4 *Soit E un thème et F un sous-module (a,b)-module monogène de E; alors F est un thème. Si F est un sous-(a,b)-module normal dans E, alors le quotient $E\big/F$ est un thème.*

Remarque. Si F est un sous-(a,b)-module normal dans E, alors F est nécessairement monogène c'est donc un sous-thème normal de E.
En effet si F est normal, $F\big/b.F \to E\big/b.E$ est injective. Comme l'action de a sur $E\big/b.E$ est un donnée par un nilpotent principal, le sous-espace stable $F\big/b.F$ est égal à $Im(a^h)$ pour un entier h; donc $F\big/a.F + b.F$ est de dimension 1, ce qui implique que F est monogène. □

Preuve. La première assertion est immédiate.
Comme le quotient d'un (a,b)-module monogène est monogène et le quotient d'un (a,b)-module géométrique est géométrique, le quotient $E\big/F$ est monogène et géométrique.
Montrons que $E\big/F$ est un thème par récurrence sur le rang de F.
En rang 1, le résultat est une conséquence immédiate de la preuve de la proposition

2.1.3 : en considérant l'application $g_\lambda : \Xi_\Lambda^{(N)} \to \Xi_\Lambda^{(N)}$ qui est donnée par la somme directe de f_λ composée avec l'inclusion $\Xi_\lambda^{(N-1)} \hookrightarrow \Xi_\lambda^{(N)}$, sur $\Xi_\lambda^{(N)}$ et l'identité sur $\Xi_\mu^{(N)}$ pour $\mu \in \Lambda, \mu \neq \lambda$.
Supposons maintenant le résultat établi pour F de rang $\leq k-1$ et considérons un sous-module normal F de rang k d'un thème E. En choisissant un sous-module normal $E_\lambda \subset F$ qui est normal dans F donc dans E, on constate que $E\big/F \simeq (E\big/E_\lambda)\Big/(F\big/E_\lambda)$ et donc que l'on a un quotient du thème $E\big/E_\lambda$ par le sous module normal $F\big/E_\lambda$ qui est de rang $k-1$. L'hypothèse de récurrence permet donc de conclure. ∎

Corollaire 2.1.5 *Soit E un (a,b)-module monogène. C'est un thème si et seulement si pour chaque $[\lambda] \in Exp(E)$, la partie $[\lambda]-$coprimitive $E\big/[\lambda]$ est un thème.*

Preuve. Le théorème 2.1.4 de stabilité des thèmes par quotient implique que la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante.
Posons $Exp(E) = \{[\lambda_1], \dots, [\lambda_d]\}$. Soit $\theta_i : E \to \Xi_{\lambda_i}^{(N)}$ pour $i \in [1, d]$ l'application (a,b)-linéaire obtenue en composant le quotient $E \to E\big/[\lambda_i]$ avec une injection (a,b)-linéaire du thème primitif $E\big/[\lambda_i]$ dans $\Xi_{\lambda_i}^{(N)}$, où $\{\lambda_i\} = [\lambda_i] \cap]0, 1]$.
Posons alors $\theta := \oplus_{i=1}^d \theta_i : E \to \Xi_\Lambda^{(N)}$, où $\Lambda := \{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$, et montrons que θ est injective. Par construction, on a $Ker\,\theta_i = E[\neq \lambda_i]$ et comme $\cap_i E[P_i] = E[\cap_i P_i]$ on obtient l'injectivité puisque $\cap_{i=1}^d [\neq \lambda_i] = \emptyset$ dans $Exp(E)$. ∎

Nous déduirons plus loin, grâce au théorème de dualité, qu'un (a,b)-module monogène régulier E est un thème si et seulement si pour chaque $[\lambda] \in Exp(E)$ la partie primitive $E[\lambda]$ de E est un thème. Le lecteur, à titre d'exercice, pourra montrer directement ce résultat en s'inspirant de la méthode de démonstration utilisée pour obtenir la caractérisation suivante des thèmes primitifs.

Théorème 2.1.6 *Soit E un (a,b)-module monogène géométrique possédant un unique sous-module normal de rang 1. Alors E est un thème primitif.*

Démonstration. Par récurrence sur le rang de E. L'assertion étant claire en rang 1, supposons-la démontrée en rang $k \geq 1$ et considérons un (a,b)-module monogène géométrique E de rang $k+1$ vérifiant notre hypothèse. Soit F un sous-module normal de rang k de E. Alors c'est un thème $[\lambda]-$primitif d'après l'hypothèse de récurrence[2]. On a une suite exacte

$$0 \to F \to E \to E_{\lambda'} \to 0 \quad \text{avec} \quad \lambda' \in [\lambda] \qquad (@)$$

car si E n'était pas primitif, il possèderait deux sous-modules normaux de rang 1 correspondant à des exposants distincts modulo $\mathbb{Z}$, contredisant l'hypothèse.

[2]Remarquer que si G est normal dans F qui est normal dans E, G est normal dans E.

Fixons une injection $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaire $j : F \to \Xi$ et considérons la suite exacte d'espaces vectoriels

$$0 \to Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(E_{\lambda'}, \Xi) \to Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(E, \Xi) \to Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(F, \Xi) \to 0$$

déduite de (@), l'exactitude résultant de [B. 05] th. 2.2.1 p.24. Soit $\tilde{j} \in Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(E, \Xi)$ s'envoyant sur $j \in Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(F, \Xi)$. Si $\tilde{j}$ est injective, la démonstration est terminée par définition d'un thème. Sinon, soit $G := Ker\tilde{j} \neq \{0\}$. Comme $\tilde{j}$ induit j sur F, on aura $G \cap F = \{0\}$, et donc G est de rang 1 et normal comme noyau, puisque Ξ n'a pas de $b-$torsion. Mais l'unique sous-module normal de rang 1 de E est contenu dans F, puisque F est de rang $k \geq 1$. Contradiction.
Donc $\tilde{j}$ est injectif . ■

Corollaire 2.1.7 *Soit E un thème primitif de rang k. Alors E possède pour chaque $j \in [0, k]$ un unique sous-module F_j qui est normal et de rang j. Choisissons, pour chaque $j \in [0, k-1]$, une injection $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaire $\theta_j : E\big/F_j \to \Xi$. Alors $\theta_0, \dots, \theta_{k-1}$ forment une base de l'espace vectoriel $Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(E, \Xi)$.*

Preuve. Montrons par récurrence sur $j \geq 1$ l'unicité du sous-(a,b)-module normal de rang j dans un thème primitif E. Comme le cas $j = 1$ a été montré au théorème précédent, supposons $j \geq 2$ et l'assertion montrée pour un sous-(a,b)-module normal de rang $j-1$ d'un thème primitif. Soit E un thème primitif et notons G son unique sous-(a,b)-module normal de rang 1. Alors $E\big/G$ est un thème primitif et il admet donc un unique sous-(a,b)-module normal F_0 de rang $j-1$. Soit $\pi : E \to E\big/G$ l'application quotient, et notons $F := \pi^{-1}(F_0)$. Alors F est un sous-(a,b)-module normal de rang j de E.
Considérons alors un sous-(a,b)-module normal F_1 dans E de rang j. On a $G \subset F_1$, car si G n'était pas l'unique sous-(a,b)-module normal de rang 1 de F_1, cela contredirait l'unicité de G. Donc $\pi(F_1)$ est de rang $j-1$ dans $E\big/G$.
Il est normal car si $y \in \pi(F_1) \cap b.(E\big/G)$, on peut écrire $y = \pi(x)$ où $x \in F_1$ et $y = \pi(b.z)$ où $z \in E$. Donc $x = b.z + t$ avec $t \in G \subset F_1$. Alors $x - t \in F_1 \cap b.E = b.F_1$. Donc $y = \pi(x-t)$ est dans $b.\pi(F_1)$. On en déduit que $\pi(F_1) = F_0$ ce qui implique $F_1 = F$.
La seconde assertion du corollaire résulte du fait que $\dim_{\mathbb{C}}(Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(E, \Xi)) = k$ d'après le théorème 2.2.1 de [B. 05] et du fait que les θ_i sont linéairement indépendants. En effet si l'on a $\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i.\theta_i = 0$ et i_0 est le premier indice pour lequel $\alpha_{i_0} \neq 0$, alors, pour $x \in F_{i_0+1} \setminus F_{i_0}$ on obtient $\alpha_{i_0}.\theta_{i_0}(x) = 0$, ce qui est absurde. ■

Remarque importante. Un thème $[\lambda]-$primitif possède une **unique suite de Jordan-Hölder**, et réciproquement, l'unicité de la suite de Jordan-Hölder pour un (a,b)-module monogène géométrique $[\lambda]-$primitifs **caractérise les thèmes $[\lambda]-$primitifs**.
En fait, quitte à fixer un ordre dans $Exp(E)$, on a également unicité de la suite de Jordan-Hölder d'un thème général respectant l'ordre fixé. □

Lemme 2.1.8 *Soit* E *un thème* $[\lambda]-$*primitif. Soit*

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{k-1} \subset F_k = E$$

son unique suite de Jordan-Hölder et posons $F_j/F_{j-1} \simeq E_{\lambda_j}$ *pour* $j \in [1, k]$. *Alors pour chaque* $j \in [1, k-1]$ *le nombre* $p_j = \lambda_{j+1} - \lambda_j + 1$ *est un entier naturel.*

PREUVE. Le fait que $p_j \in \mathbb{Z}$ est trivial. C'est un entier positif ou nul en raison de la proposition 3.5.2 de [B.09] qui donne l'inégalité $\lambda_{j+1} \geq \lambda_j - 1$. $\blacksquare$

On remarquera que les inégalités du lemme précédent reviennent à dire que la suite $\lambda_j + j$ est croissante (comparer avec la proposition 3.5.2 de [B.09]).

NOTATION. Soit E un thème $[\lambda]-$primitif. Nous noterons $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les nombres associés aux quotients de son unique suite de Jordan-Hölder. Une façon équivalente de se donner la suite (ordonnée) $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ consiste à préciser λ_1 et à se donner les entiers (positifs ou nuls) $p_1, \cdots, p_{k-1}$ définis en posant $\lambda_{j+1} = \lambda_j + p_j - 1$ pour $j \in [1, k-1]$. $\square$

Définition 2.1.9 *Nous appellerons* **invariants fondamentaux** *d'un thème* E *supposé* $[\lambda]-$*primitif de rang* k *la donnée de* **la suite ordonnée** $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *ou bien, ce qui est équivalent, de* λ_1 *et des entiers* $p_1, \cdots, p_{k-1}$.

REMARQUE. On notera que l'on a $\lambda_j + j > \lambda_k + k > k$ pour chaque $j \in [1, k]$ puisque l'on a $\lambda_k > 0$. En particulier on a $\lambda_1 > k - 1$. $\square$

Pour un thème $[\lambda]-$primitif E la donnée des invariants fondamentaux est plus fine que la donnée du polynôme de Bernstein B_E qui revient à se donner l'élément de Bernstein[3] $P_E := (a - \lambda_1.b)\dots(a - \lambda_k.b) \in \tilde{\mathcal{A}}$. En effet, le polynôme de Bernstein ne précise pas l'ordre de ses racines.

Théorème 2.1.10 *Soit* E *un thème* $[\lambda]-$*primitif de rang* k *d'invariants fondamentaux* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. *Alors pour tout nombre rationnel* δ *vérifiant* $\delta > \lambda_k + k - 1$ *le (a,b)-module* $E^* \otimes_{a,b} E_\delta$ *est un thème* $[\delta - \lambda]-$*primitif, où* E^* *désigne le dual de* E, *d'invariants fondamentaux* $\delta - \lambda_k, \dots, \delta - \lambda_1$.

DÉMONSTRATION. D'abord le dual d'un (a,b)-module régulier et monogène est régulier et monogène d'après [B.09]. Le dual d'un thème $[\lambda]-$primitif est $[-\lambda]-$primitif. Par ailleurs les sous-modules normaux du dual correspondent bijectivement aux duaux des quotients. Comme on a exactement un seul quotient pour chaque $j \in [0, k]$ où k désigne le rang de E, on en conclut que $E^* \otimes_{a,b} E_\delta$ sera un thème grâce au théorème 2.1.6 dès qu'il sera géométrique, c'est à dire dès que le premier quotient de la suite de Jordan-Hölder de $E^* \otimes_{a,b} E_\delta$ sera $> k - 1$. Comme il vaut $\delta - \lambda_k$ l'assertion est démontrée. $\blacksquare$

[3]voir [B.09] def. 3.3.1.

Remarques.

1) Donc pour un thème $[\lambda]-$primitif E d'invariants fondamentaux $\lambda_1, p_1, \dots, p_{k-1}$ et δ rationnel tel que $\delta - \lambda_k > k-1$, le thème $[\delta - \lambda]-$primitif $E^* \otimes_{a,b} E_\delta$ aura pour invariants fondamentaux $\delta - \lambda_k, p_{k-1}, \dots, p_1$.

2) Pour un thème général on en déduit que pour $\delta \in \mathbb{N}$ assez grand, $E^* \otimes E_\delta$ est un thème, en remarquant que la partie $[\lambda]-$coprimitive de $E^* \otimes E_\delta$ est $(E[-\lambda])^* \otimes E_\delta$ pour chaque $[\lambda] \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$. On conclut alors grâce au corollaire 2.1.5. $\square$

On a alors le dual du corollaire 2.1.5.

Corollaire 2.1.11 *Soit E un (a,b)-module monogène géométrique. C'est un thème si et seulement si pour chaque $[\lambda] \in Exp(E)$, la partie $[\lambda]-$primitive $E[\lambda]$ de E est un thème.*

2.2 Structure des thèmes $[\lambda]-$primitifs.

2.2.1 Le théorème de structure.

En fait le théorème 3.4.1 de [B.09] donne le théorème de structure suivant pour les thèmes $[\lambda]-$primitifs :

Théorème 2.2.1 *Soit E un thème $[\lambda]-$primitif dont les invariants fondamentaux sont $\lambda_1, p_1, \dots, p_{k-1}$. Alors il existe $S_1, \cdots, S_{k-1}$ des éléments de $\mathbb{C}[b]$ vérifiant $S_j(0) = 1$ et $\deg(S_j) \leq p_j + \cdots + p_{k-1}$, tels que l'on ait $E \simeq \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.P$ avec*

$$P = (a - \lambda_1.b).S_1^{-1}(a - \lambda_2.b)\dots S_{k-1}^{-1}.(a - \lambda_k.b).$$

De plus, pour chaque $j \in [1, k-1]$ le coefficient de b^{p_j} dans S_j est non nul. Réciproquement, pour tout choix de $[\lambda] \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, tout choix de $\lambda_1 \in [\lambda], \lambda_1 > k-1$, d'entiers $p_1, \cdots, p_{k-1}$ positifs ou nuls, et d'éléments $S_1, \cdots, S_{k-1}$ dans $\mathbb{C}[[b]]$ vérifiant $S_j(0) = 1$, tels que le coefficient de b^{p_j} dans S_j soit non nul, le quotient $\tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.P$ est un thème $[\lambda]-$primitif.

Démonstration du théorème. La partie directe est une conséquence immédiate du théorème 3.4.1 et du lemme 3.5.1 de [B.09], compte tenu de l'unicité de la suite de Jordan-Hölder d'un thème $[\lambda]-$primitif.
Montrons la réciproque. Il est clair que le quotient $\tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.P$ est un (a,b)-module monogène géométrique de rang k. Nous allons montrer que c'est un thème par récurrence sur k. Comme le cas $k = 1$ est évident, supposons le résultat montré pour $k-1$. Soit $Q := (a - \lambda_1.b).S_1^{-1}(a - \lambda_2.b)\dots S_{k-2}^{-1}.(a - \lambda_{k-1}.b)$. L'hypothèse de récurrence donne alors que $F := \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.Q$ est un thème. Soit donc $\varphi \in \Xi_\lambda^{(N)}$ tel que $\tilde{\mathcal{A}}.\varphi$ soit isomorphe à F. Pour construire $\psi \in \Xi_\lambda^{(N+1)}$ vérifiant

$(a-\lambda_k.b).\psi = S_{k-1}.\varphi$, il suffit de résoudre une équation différentielle élémentaire. Explicitement $s.f'(s) - \lambda_k.f(s) = S_{k-1}(b).\varphi(s)$, où l'on a posé $b.\psi = f$. Le point important est que, comme F est de rang $k-1$, on peut, quitte à multiplier φ par un inversible de $\mathbb{C}[[b]]$, supposer que φ est un polynôme en $Log\, s$ à coefficient dans $\mathbb{C}[[b]]$, de degré $k-2$ avec un coefficient de $(Log\, s)^{k-2}$ égal à $s^{\lambda_{k-1}-1}$. On constate alors que le fait que le coefficient de $b^{p_{k-1}}$ dans S_{k-1} soit non nul, assure que le degré en $Log\, s$ de ψ sera exactement $k-1$, puisque $\lambda_k = \lambda_{k-1}+p_{k-1}-1$. Alors le morphisme $\tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.P \to \Xi_\lambda^{(N+1)}$ défini en envoyant 1 sur ψ aura une image $\tilde{\mathcal{A}}.\psi$ qui sera de rang k sur $\mathbb{C}[[b]]$. C'est donc un isomorphisme, et $\tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.P$ est donc un thème. ■

2.2.2 Bases standards.

Commençons par expliciter la suite de Jordan-Hölder d'un thème $[\lambda]-$primitif de rang k quand il est plongé dans $\Xi_\lambda^{(k-1)}$ l'espace des développements asymptotiques.

Lemme 2.2.2 *On fixe $[\lambda] \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et on note $\{\lambda\} =]0,1] \cap [\lambda]$. Soit $\varphi \in \Xi_\lambda^{(k-1)}$ tel que $E := \tilde{\mathcal{A}}.\varphi$ soit un thème de rang k. Alors pour chaque $j \in [1,k]$ l'intersection $E \cap \Xi_\lambda^{(j-1)}$ est l'unique sous-thème normal F_j de rang j de E. La restriction de $\pi_j : \Xi_\lambda^{(j-1)} \to \Xi_\lambda^{(j-1)}/\Xi_\lambda^{(j-2)} \simeq E_\lambda$ à F_j a pour image E_{λ_j} et pour noyau F_{j-1}.*

Preuve. Montrons que le sous-(a,b)-module $G_j := E \cap \Xi_\lambda^{(j-1)}$ est normal : si $x \in E$ et vérifie $b.x \in \Xi_\lambda^{(j-1)}$ on a nécessairement $x \in \Xi_\lambda^{(j-1)}$ puisque b préserve le degré en $Log\, s$.
Comme le noyau de $(\pi_j)_{|G_j}$ est G_{j-1}, on a $rg(G_j) \leq rg(G_{j-1})+1$, pour chaque $j \in [1,k]$. Comme $G_0 = \{0\}$ et $rg(G_k) = k$ par hypothèse, on a nécessairement $rg(G_j) = j$ pour tout $j \in [1,k]$ et donc $G_j = F_j$. ■

Corollaire 2.2.3 *Dans la situation du lemme précédent, posons $\pi_k(\varphi) = S_k.e_{\lambda_k}$. Alors S_k est un inversible de $\mathbb{C}[[b]]$ et l'élément*

$$\varphi_{k-1} := (a-\lambda_k b)).S_k^{-1}.\varphi$$

est un générateur du sous-thème normal F_{k-1} de $E = F_k$.

Preuve. En fait S_k est le coefficient de $s^{\lambda_k-1}.(Log\, s)^{k-1}/k!$ dans φ, ce qui montre que φ_{k-1} est dans $F_{k-1} = Ker(\pi_k) \cap E$. C'est nécessairement un générateur de F_{k-1} car dans l'espace vectoriel $F_{k-1}/b.F_{k-1} \subset E/b.E$ qui est de dimension $k-1$, les classes $\varphi_{k-1}, a.\varphi_{k-1}, \cdots, a^{k-2}.\varphi_{k-1}$ forment un système libre, puisque les classes de $\varphi, a.\varphi, \cdots, a^{k-1}.\varphi$ dans $E/b.E$ forment une base. ■

La base standard de $\tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.P$. Soit $E := \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.P$ un thème de rang k, où l'on suppose que $P = (a - \lambda_1.b).S_1^{-1}(a - \lambda_2.b) \dots S_{k-1}^{-1}.(a - \lambda_k.b)$. Soit e un générateur de E comme $\tilde{\mathcal{A}}$−module, d'annulateur $\tilde{\mathcal{A}}.P$ (par exemple $e = [1]$). Définissons les éléments $e_k, e_{k-1}, \cdots, e_1$ de E par les relations suivantes :

i) $e_k := e$;

ii) $e_j := S_j^{-1}.(a - \lambda_{j+1}.b).e_{j+1}$ pour $j \in [1, k-1]$.

Une conséquence immédiate du corollaire précédent est que $e_1, \cdots, e_k$ est une $\mathbb{C}[[b]]$−base de E. Elle sera appelée **la base standard** associée au générateur e et au choix de P engendrant l'annulateur de e dans E.
On notera que les relations $(a-\lambda_{j+1}.b).e_{j+1} = S_j.e_j, j \in [0, k-1]$ avec la convention $e_0 = 0$ déterminent le (a,b)-module E de rang k. □

Lemme 2.2.4 *Soit E un thème $[\lambda]$−primitif et soit, pour $j \in [0, k-1]$*

$$P_j := (a - \lambda_{j+1}.b).S_{j+1}^{-1} \dots S_{k-1}^{-1}.(a - \lambda_k.b)$$

*où P_0 est le générateur de l'idéal annulateur d'un générateur standard $e := e_k$ de E. Notons $e_1, \dots, e_k$ la base standard associée à e.
Si $x \in F_{k-j}$ vérifie $P_0.x = 0$ dans E, alors $P_j.x = 0$ dans E, et il existe $\rho \in \mathbb{C}$ tel que $x - \rho.b^{\lambda_k - \lambda_{k-j}}.e_{k-j}$ soit dans F_{k-j-1}.*

Preuve. En envoyant e sur x on définit un élément de $Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(E, F_{k-j})$ dont le noyau contient nécessairement F_j. C'est donc une application $\tilde{\mathcal{A}}$−linéaire de E/F_j dans F_{k-j}. Comme $P_j(e) = S_j.e_j$ est dans F_j, on aura $P_j.x = 0$.
Mais alors l'image de x dans $E_{\lambda_{k-j}}$ via le quotient $F_{k-j}/F_{k-j-1} \simeq E_{\lambda_{k-j}}$ est dans le noyau de

$$P_j : E_{\lambda_{k-j}} \to E_{\lambda_{k-j}}$$

qui est égal à $\mathbb{C}.b^{\lambda_k - \lambda_{k-j}}.e_{\lambda_{k-j}}$ puisque ce noyau est isomorphe à $Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(F_j, E_{\lambda_{k-j}})$ qui est de dimension au plus 1 puisque F_j est un thème, ce qui prouve notre seconde assertion. ■

3 Endomorphismes et thèmes stables.

3.1 Injections entre deux thèmes primitifs de même rang.

Commençons par étudier les injections $\tilde{\mathcal{A}}$−linéaires entre deux thèmes $[\lambda]$−primitifs.

Lemme 3.1.1 *Soitent $E' \subset E$ deux thèmes $[\lambda]$−primitifs de même rang k. Soient $\mu_1, \dots, \mu_k$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ leurs invariants fondamentaux respectifs. Alors on a*

i) $\forall j \in [1, k] \quad \mu_j \geq \lambda_j$;

ii) $\dim_{\mathbb{C}}(E/E') = \sum_{j=1}^k \mu_j - \lambda_j$.

Preuve. Montrons cela par récurrence sur le rang k. Le résultat étant clair pour $k = 1$, supposons-le montré en rang $k - 1$. Comme $F'_{k-1} \subset F_{k-1}$, on obtient immédiatement les inégalités $\mu_j \geq \lambda_j \quad \forall j \in [1, k-1]$. De plus, la restriction à E' de l'application $\pi_k : E \to E\big/F_{k-1} \simeq E_{\lambda_k}$ n'est pas nulle, sinon E' serait contenu dans F_{k-1} et ne serait pas de rang k. On a donc un quotient de rang 1 de E' contenu dans E_{λ_k}. Ceci donne $\mu_k \geq \lambda_k$.
Enfin on a la suite exacte

$$0 \to F_{k-1}\big/F'_{k-1} \to E\big/E' \to E\big/(F_{k-1} + E') \to 0$$

puisque $F_{k-1} \cap E'$ est normal et de rang $k-1$ dans E', comme noyau de $(\pi_k)_{|E'}$, et donc égal à F'_{k-1}. L'hypothèse de récurrence donne
$\dim_{\mathbb{C}} F_{k-1}\big/F'_{k-1} = \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j - \lambda_j$. De plus, puisque $\pi_k(E') = E_{\mu_k}$, le quotient $E\big/(F_{k-1} + E')$ est de dimension $\mu_k - \lambda_k$ et la suite exacte permet de conclure. ■

Théorème 3.1.2 *Soient E' et E deux thèmes $[\lambda]-$primitifs de rang k. L'espace vectoriel des morphismes $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaires de E' dans E modulo ceux qui sont de rang $\leq k-1$ est de dimension ≤ 1.*
Supposons que les invariants fondamentaux respectifs $\mu_1, \dots, \mu_k$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de E' et E vérifient la condition

$$\mu_j - \lambda_j \geq k - 1 \quad \forall j \in [1, k].$$

Alors il existe une injection $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaire $i : E' \hookrightarrow E$.

Démonstration. Montrons par récurrence sur le rang la première assertion : comme elle est clair en rang 1, supposons-là démontrée en rang $k-1$, et considérons deux injections φ_1 et φ_2 de E' dans E. Leurs restrictions à F'_{k-1} sont des injections dans F_{k-1}, et l'hypothèse de récurrence fournit un $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $\varphi_1 - \alpha.\varphi_2$ ne soit plus injective dans F'_{k-1}, donc à fortiori dans E'.
Montrons le second résultat par récurrence sur $k \geq 1$. Comme le cas $k = 1$ est immédiat, supposons $k \geq 2$ et le résultat prouvé en rang $k-1$ sous la forme suivante : Soient F'_{k-1} et F_{k-1} deux thèmes de rang $k-1$ vérifiant $\mu_j - \lambda_j \geq k-2$ pour $j \in [1, k-1]$. Notons

$$\begin{aligned} Q' &:= (a - \mu_1.b).T_1^{-1} \dots T_{k-2}^{-1}.(a - \mu_{k-1}) \\ Q &:= (a - \lambda_1.b).S_1^{-1} \dots S_{k-2}^{-1}.(a - \lambda_{k-1}) \end{aligned}$$

les générateurs respectifs des annulateurs dans $\tilde{\mathcal{A}}$ des générateurs respectifs ε_{k-1} et e_{k-1} de F'_{k-1} et F_{k-1}. Alors il existe un élément

$$x := \sigma.b^{\mu_{k-1} - \lambda_{k-1}}.e_{k-1} + \sum_{h=1}^{k-2} V_h.e_h$$

de F_{k-1} qui est annulé par Q', avec $V_h \in \mathbb{C}[[b]], \forall h \in [1, k-2]$ et $\sigma \neq 0$. Ceci implique l'existence d'une injection $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaire de F'_{k-1} dans F_{k-1} donnée en envoyant le générateur ε_{k-1} de F'_{k-1} sur x.

Appliquons cette hypothèse de récurrence de la façon suivante : soient F'_{k-1} et F_{k-1} les sous-thèmes normaux de rang $k-1$ de E' et E respectivement. Comme on a $\mu_j - \lambda_j \geq k-1$ pour $j \in [1, k-1]$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à F'_{k-1} et à $b.F_{k-1}$. Ce qui signifie que l'élément x fournit par l'hypothèse de récurrence est dans $b.F_{k-1}$, et l'on aura, puisque $\mu_{k-1} - \lambda_{k-1} \geq k-1 \geq 1$ simplement $V_h \in b.\mathbb{C}[[b]]$ pour chaque $h \in [1, k-1]$.

Notons par ε_k et e_k les générateurs de E' et E, et par $P' := Q'.T_{k-1}^{-1}.(a - \mu_k.b)$ et $P := Q.S_{k-1}^{-1}.(a - \lambda_k.b)$ les générateurs des annulateurs respectifs de ε_k et e_k. Cherchons alors un élément $y \in E$ de la forme

$$y = \tau.b^{\mu_k - \lambda_k}.e_k + \sum_{h=1}^{k-1} W_h.e_h$$

vérifiant les conditions suivantes :

i) $\tau \neq 0$.

ii) $W_h \in \mathbb{C}[[b]] \quad \forall h \in [1, k-1]$.

iii) $(a - \mu_k.b).y = T_{k-1}.x$.

Il donnera alors une injection de E' dans E, puisque $y \notin F_{k-1}$ et que $P.y = 0$. Remarquons que comme la suite $\lambda_j + j$ est croissante, on a

$$\mu_k \geq \lambda_k + k - 1 \geq \lambda_j + j - 1 \geq \lambda_j \quad \forall j \in [1, k].$$

La relation iii) donne les équations suivantes :

$$\begin{aligned} &b.W'_{k-1} - (\mu_k - \lambda_{k-1}).W_{k-1} = \sigma.T_{k-1}.b^{\mu_{k-1}-\lambda_{k-1}-1} - \tau.S_{k-1}.b^{\mu_k - \lambda_k - 1} \\ &b^2.W'_h - (\mu_k - \lambda_h).b.W_h = T_{k-1}.V_h - S_h.W_{h+1} \end{aligned} \tag{h}$$

La première équation aura une solution dans $\mathbb{C}[[b]]$, unique à $\mathbb{C}.b^{\mu_k - \lambda_{k-1}}$ près, pourvu que le coefficient de $b^{\mu_k - \lambda_{k-1}}$ soit nul dans le membre de droite. Si $\alpha' \neq 0$ est le coefficient de $b^{p'_{k-1}}$ dans T_{k-1} et $\alpha \neq 0$ celui de $b^{p_{k-1}}$ dans S_{k-1}, il nous suffit de choisir $\sigma = \tau.\alpha/\alpha'$ pour assurer l'existence de $W_{k-1} \in b^{k-2}.\mathbb{C}[[b]]$, en fait unique à $\mathbb{C}.b^{\mu_k - \lambda_{k-1}}$ près.

Supposons prouvé l'existence de $W_{h+1} \in b^h.\mathbb{C}[[b]]$, unique modulo $\mathbb{C}.b^{\mu_k - \lambda_{h+1}}$, et $h \geq 1$. Comme V_h et W_{h+1} sont dans $b.\mathbb{C}[[b]]$, pour que l'équation (h) ait une solution, unique modulo $\mathbb{C}.b^{\mu_k - \lambda_h}$, il suffit de s'assurer que le coefficient de $b^{\mu_k - \lambda_h + 1}$ dans $T_{k-1}.V_h - S_h.W_{h+1}$ est nul. Mais comme le coefficient de b^{p_h} de S_h est non nul et que l'on peut fixer arbitrairement le coefficient de $b^{\mu_k - \lambda_{h+1}}$ dans W_{h+1}, ceci ne pose pas de problème à l'aide d'un choix convenable de W_{h+1} puisque l'on a $\lambda_{h+1} = \lambda_h + p_h - 1$ qui donne $\mu_k - \lambda_h + 1 = \mu_k - \lambda_{h+1} + p_h$. ■

Remarques.

i) Une conséquence de la démonstration du théorème est que s'il existe une injection de E' dans E, elle envoie le générateur e' de E' sur

$$\tau.b^{\mu_k-\lambda_k}.e \quad modulo\ F_{k-1}$$

où e' et e sont les générateurs "standards" de E' et E, et $\tau \in \mathbb{C}^*$ est arbitraire.

ii) L'exemple 5.1.1 de l'appendice 5.1 nous fournit deux thèmes primitifs de rang 3 $E' := E/F_1$ et $E := F_3$, vérifiant $\mu_j-\lambda_j \geq k-2 = 1$ et tels que E' ne s'injecte pas dans E. En effet on a dans cet exemple $\mu_1 = \lambda_1+1, \mu_2 = \lambda_1+3, \mu_3 = \lambda_1+4$ et $\lambda_1 = \lambda_1, \lambda_2 = \lambda_1+1, \lambda_3 = \lambda_1+3$. $\square$

Corollaire 3.1.3 *Soit E un thème $[\lambda]-$primitif, et soit $R_j \subset Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(E,E)$ le sous-espace vectoriel des endomorphismes de rang $\leq j$ de E. Alors pour chaque $j \in [0, k-1]$ l'espace vectoriel complexe R_{j+1}/R_j est de dimension ≤ 1.*
En particulier, on a toujours $\dim_{\mathbb{C}}(Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(E,E)) \leq k$ avec égalité si et seulement si $(R_j)_{j\in[1,k]}$ est un drapeau complet de $Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(E,E)$, c'est-à-dire que chaque quotient R_{j+1}/R_j est de dimension 1 pour $j \in [0, k-1]$.

Preuve. Soit $\varphi : E \to E$ un morphisme de rang j. Alors son noyau est F_{k-j} puisque ce noyau est normal et de rang $k-j$. De plus, le normalisé de son image est F_j. Donc φ se factorise de la façon suivante :

$$E \to E/F_{k-j} \xrightarrow{f} F_j \hookrightarrow E$$

où la première flèche est le quotient et la dernière l'injection naturelle. La flèche f est injective, et la correspondance $\varphi \to f$ induit une bijection $\mathbb{C}-$linéaire entre R_j/R_{j-1} et l'espace vectoriel des morphismes de E/F_{k-j} dans F_j, modulo ceux qui sont de rang $\leq j-1$ (ou non injectifs, ce qui revient au même). La première assertion du théorème permet alors de conclure. $\blacksquare$

Corollaire 3.1.4 *Soit E un thème $[\lambda]-$primitif de rang k. Une condition suffisante pour qu'il existe une injection $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaire de E/F_j dans F_{k-j} est que pour chaque $h \in [1, k-j]$ on ait*

$$p_h + \cdots + p_{h+j-1} \geq k-1.$$

En particulier, pour $p_h \geq k-1 \quad \forall h \in [1, k-1]$ l'espace vectoriel $Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(E,E)$ sera de dimension k.

Preuve. Comme E/F_j est un thème $[\lambda]-$primitif de rang $k-j$ et d'invariants fondamentaux $\lambda_{j+1}, \dots, \lambda_k$ et que F_{k-j} est également thème $[\lambda]-$primitif de rang $k-j$ et d'invariants fondamentaux $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-j}$, nous pouvons conclure grâce au théorème dès que l'on a

$$\lambda_{j+h} - \lambda_h \geq k-j-1 \quad \forall h \in [1, k-j].$$

Mais $\lambda_{j+h} - \lambda_h = p_h + \cdots + p_{j+h-1} - j$ et donc le corollaire se déduit du théorème 3.1.2 et de son premier corollaire 3.1.3. $\blacksquare$

On voit facilement que la condition *nécessaire* pour avoir une injection de E/F_j dans F_{k-j} donnée par le lemme 3.1.1 correspond aux inégalités

$$p_h + \cdots + p_{h+j-1} \geq j \quad \text{pour} \quad h \in [1, k-j].$$

Elle est trivialement vérifiée si on a $p_j \geq 1, \forall j \in [1, k]$, c'est-à-dire si la suite $\lambda_1, \dots \lambda_k$ est croissante (large).

3.2 Thèmes primitifs stables.

Commençons par rappeler deux remarques simples.

Remarques.

1) Si E est un thème $[\lambda]-$primitif, l'espace vectoriel $Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(E, E_\lambda)$ est de dimension au plus égale à 1. En effet, comme E admet un unique quotient de rang 1, à savoir $E/F_{k-1} \simeq E_{\lambda_k}$, un morphisme non nul est nécessairement une injection de E_{λ_k} dans E_λ. L'espace vectoriel $Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(E, E_\lambda)$ sera donc nul pour $\lambda_k < \lambda$ et de dimension 1 pour $\lambda_k = \lambda + q$ avec $q \in \mathbb{N}$.

2) Soient E_1 et E_2 deux thèmes $[\lambda]-$primitifs de rangs k_1 et k_2, et soit $i : E_1 \hookrightarrow E_2$ une injection $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaire. Alors on a $k_2 \geq k_1$, et le normalisé de $i(E_1)$ est le sous-thème normal de rang k_1 de E_2. En particulier on aura $i(E_1)$ qui sera contenu dans le sous-thème normal de rang k_1 de E_2. Cette image est même de codimension finie dans ce sous-thème. $\square$

Proposition 3.2.1 *Soit E un thème $[\lambda]-$primitif de rang $k \geq 1$ et soit φ_0 un endomorphisme de E de rang $k-1$. Les propriétés suivantes sont vérifiées:*

i) Pour chaque $j \in [0, k]$ le rang de φ_0^j est $k-j$.

ii) Une base de l'espace vectoriel $End_{\tilde{\mathcal{A}}}(E)$ est donnée par $\mathrm{id}, \varphi_0, \dots, \varphi_0^j, \dots, \varphi_0^{k-1}$. En particulier on a $\dim_{\mathbb{C}}(End_{\tilde{\mathcal{A}}}(E)) = k$, et cette algèbre est commutative et isomorphe à $\mathbb{C}[x]/(x^k)$.

iii) Pour chaque $j \in [1, k-1]$ la restriction à F_j de φ_0 est de rang $j-1$; donc la restriction $End_{\tilde{\mathcal{A}}}(E) \to End_{\tilde{\mathcal{A}}}(F_j)$ est surjective.

iv) Pour chaque $j \in [1, k-1]$ on a un endomorphisme de $E\big/F_j$ induit par φ_0, et il est de rang $k-j-1$. On a donc également une application linéaire surjective de $End_{\tilde{\mathcal{A}}}(E)$ dans $End_{\tilde{\mathcal{A}}}(E\big/F_j)$.

Preuve. Montrons l'assertion i) par récurrence sur j. Comme elle est claire pour $j = 0, j = 1$, supposons montré que φ_0^j est de rang $k-j$ pour $j \in [1, k-1]$, et montrons que φ_0^{j+1} est de rang $k-j-1$.
Le noyau de φ_0^j est un sous-thème normal de rang j. Il est donc égal à F_j, l'unique sous-thème normal de rang j de E. Donc φ_0^j induit une injection de $E\big/F_j$ dans F_{k-j} dont l'image Φ_j est de codimension finie dans F_{k-j} (voir la remarque 2) ci-dessus). En composant à nouveau avec φ_0 dont le noyau F_1 rencontre Φ_j en un sous-(a,b)-module de rang 1, puisque $F_1 \subset F_{k-j}$, on en déduit que le noyau de φ_0 restreinte à Φ_j est de rang 1, et donc que son image, qui est Φ_{j+1}, c'est-à-dire l'image de φ_0^{j+1}, est de rang $k-j-1 = rg(\Phi_j) - 1$. Donc i) est démontrée.
Si on a une relation linéaire dans $End_{\tilde{\mathcal{A}}}(E)$

$$\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j.\varphi_0^j = 0$$

les nombres complexes α_j n'etant pas tous nuls, soit j_0 le premier entier pour lequel on a $\alpha_{j_0} \neq 0$. Alors on aura $\Phi_{j_0} \subset \sum_{h=j_0+1}^{k-1} \Phi_h$. Mais pour chaque j on a $\Phi_j \subset F_{k-j}$, et donc $\Phi_{j_0} \subset F_{k-j_0-1}$, ce qui contredit le fait que $\varphi_0^{j_0}$ soit de rang $k-j_0$. Donc on a k vecteurs indépendants dans $End_{\tilde{\mathcal{A}}}(E)$, et comme on sait (voir corollaire 4.0.13) que cet espace vectoriel est de dimension au plus égale à k, il est de dimension k et on a une base de $End_{\tilde{\mathcal{A}}}(E)$.
Montrons iii). Comme la restriction de φ_0 à F_j est de noyau $F_1 \subset F_j$, le rang est bien $j-1$. La surjectivité annoncée résulte alors de ii) appliqué au thème F_j.
Comme la restriction de φ_0 à F_j est de rang $j-1$, on a $\varphi_0(F_j) \subset F_{j-1} \subset F_j$, et φ_0 induit un endomorphisme de $E\big/F_j$. Comme l'image Φ_1 de φ_0 est de codimension finie dans F_{k-1}, le quotient $\Phi_1\big/F_j \cap \Phi_1$ est de rang $k-j-1$, puisque $F_j \subset F_{k-1}$ montre que l'on quotiente un $\mathbb{C}[[b]]-$module de rang $k-1$ par un sous$-\mathbb{C}[[b]]-$module de rang j. La surjectivité de l'application linéaire $End_{\tilde{\mathcal{A}}}(E) \to End_{\tilde{\mathcal{A}}}(E\big/F_j)$ se déduit alors de ii) appliqué au thème $E\big/F_j$. ■

Exemple important. Soit $e \in \Xi_\lambda^{(k-1)}$ et supposons que le thème $\tilde{\mathcal{A}}.e$ soit de rang k et **stable par la monodromie** $\mathcal{T}$ de $\Xi_\lambda^{(k-1)}$. Rappelons que pour $j \in [0, k-1]$

$$\mathcal{T}\big(s^{\lambda-1}.\frac{(Log\, s)^j}{j!}\big) = \exp(2i\pi.\lambda).s^{\lambda-1}\frac{(Log\, s + 2i\pi)^j}{j!}$$

et que $\mathcal{T}$ commute à l'action de $\tilde{\mathcal{A}}$ sur $\Xi_\lambda^{(k-1)}$. Alors $\mathcal{T} - \exp(2i\pi.\lambda).\mathrm{id}$ induit un endomorphisme de rang $k-1$ sur $\tilde{\mathcal{A}}.e$.

En effet, on peut supposer que

$$e = s^{\lambda_k - 1}.\frac{(Log\, s)^{k-1}}{(k-1)!} \quad modulo \quad \Xi_\lambda^{(k-1)}$$

et donc que $\varepsilon := (\mathcal{T} - \exp(2i\pi.\lambda).\,\mathrm{id})(e)$ sera dans $\Xi_\lambda^{(k-2)} \setminus \Xi_\lambda^{(k-3)}$, c'est à dire dans $F_{k-1} \setminus F_{k-2}$, puisque l'on a supposé la stabilité de $E := \tilde{\mathcal{A}}.e$ par $\mathcal{T}$ et que le terme en

$$s^{\lambda_k - 1}.\frac{(Log\, s)^{k-2}}{(k-2)!}$$

ne peut disparaître, étant donné que $\mathcal{T} - exp(2i\pi.\lambda).\,\mathrm{id}$ fait strictement décroître le degré en $Log\, s$ dans Ξ_λ.
Mais si $P \in \tilde{\mathcal{A}}$ engendre l'annulateur de e dans $\Xi_\lambda^{(k-1)}$, on aura $P.\varepsilon = 0$, puisque $\mathcal{T}$ commute à l'action de $\tilde{\mathcal{A}}$; ceci montre que l'on a bien un endomorphisme de E en posant $\varphi_0(e) = \varepsilon$, et que cet endomorphisme est de rang $k-1$. En effet, pour $\varepsilon \in \Xi_\lambda$, le thème $[\lambda]-$primitif $\tilde{\mathcal{A}}.\varepsilon$ est de rang l si et seulement si $l-1$ est le degré en $Log\, s$ de ε. □

Définition 3.2.2 *On dira qu'un thème $[\lambda]-$primitif E de rang k est* **stable** *s'il admet un endomorphisme de rang égal à $k-1$.*

La proposition 3.2.1 implique immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.3 (de la proposition 3.2.1) *Soit E un thème $[\lambda]-$primitif E de rang k. Si E est stable, tout sous-thème normal et tout thème quotient de E est stable.*

Lemme 3.2.4 *Les propriétés suivantes sont équivalentes pour un thème $[\lambda]-$primitif E de rang k :*

i) E est stable.

ii) La dimension de $End_{\tilde{\mathcal{A}}}(E)$ est égale à k.

iii) L'image d'une injection $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaire de E dans $\Xi_\lambda^{(k-1)}$ est indépendante de l'injection choisie.

iv) Il existe une injection $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaire de E dans $\Xi_\lambda^{(k-1)}$ dont l'image est stable par la monodromie $\mathcal{T}$. □

Preuve. L'implication $i) \Rightarrow ii)$ est montrée dans la proposition 3.2.1. L'implication $ii) \Rightarrow iii)$ résulte du fait que si i est une injection de E dans $\Xi_\lambda^{(k-1)}$, la composition par i donne une injection linéaire de $End_{\tilde{\mathcal{A}}}(E)$ dans $Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(E, \Xi_\lambda^{(k-1)})$. Ces deux espaces vectoriels étant de même dimension k, le premier par hypothèse, le second d'après le théorème 2.2.1 de [B.05], en remarquant qu'une application $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaire

d'un thème $[\lambda]-$primitif de rang k dans Ξ a toujours son image dans $\Xi_\lambda^{(k-1)}$, on en déduit que toute injection de E dans $\Xi_\lambda^{(k-1)}$ est de la forme $\varphi \circ i$ où $\varphi \in Aut_{\tilde{\mathcal{A}}}(E)$, ce qui prouve iii).
L'implication *iii)* $\Rightarrow$ *iv)* est facile puisque $\mathcal{T} \circ i$ est encore une injection $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaire de E dans $\Xi_\lambda^{(k-1)}$ quand i l'est.
L'implication *iv)* $\Rightarrow$ *i)* résulte de l'exemple important traité plus haut. ■

Corollaire 3.2.5 *Soit E un thème $[\lambda]-$primitif stable d'invariants fondamentaux $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Alors pour $\delta \in \mathbb{Q}$ vérifiant $\delta - \lambda_k > k-1$ le thème $E^* \otimes E_\delta$ est stable.*

Preuve. Il nous suffit de montrer que $End_{\tilde{\mathcal{A}}}(E^* \otimes E_\delta)$ est de dimension $k := rg(E)$. Mais cet espace vectoriel est isomorphe à $End_{\tilde{\mathcal{A}}}(E^*)$ puisque pour un (a,b)-module F, le produit tensoriel $F \otimes_{a,b} E_\delta$ consiste à regarder F en changeant a en $a + \delta.b$, ce qui ne change pas les endomorphismes $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaires.
Par ailleurs la transposition donne une application $\mathbb{C}-$linéaire $End_{\tilde{\mathcal{A}}}(E) \to End_{\tilde{\mathcal{A}}}(E^*)$ qui est clairement bijective, puisque $(E^*)^*$ est canoniquement isomorphe à E.
Le résultat en découle. ■

Lemme 3.2.6 *Soit E un thème $[\lambda]-$primitif de rang k, et supposons que l'on ait $p_{k-1} = 0$ avec $k \geq 2$, ou bien $p_{k-1} = 1$ et $p_{k-2} \geq 2$ avec $k \geq 3$. Alors E n'est pas stable.*

Preuve. Soit e un générateur standard de E, et soit $\tilde{\mathcal{A}}.P$ son annulateur. Il nous suffit de montrer qu'il n'existe pas d'élément $x \in F_{k-1} \setminus F_{k-2}$ qui soit annulé par P. Un tel élément doit vérifier

$$(a - \lambda_k.b).x = S_{k-1}.y \quad \text{avec} \quad y \in F_{k-2} \tag{*}$$

et $Q.y = 0$ où l'on a posé $P := Q.S_{k-1}^{-1}.(a - \lambda_k.b)$. On sait (voir le lemme 2.2.4) que l'on peut écrire

$$x = b^{\lambda_k - \lambda_{k-1}}.e_{k-1} + \sum_{j=1}^{k-2} U_j.e_j \quad \text{avec} \quad U_j \in \mathbb{C}[[b]] \quad \forall j \in [1, k-2]$$
$$y - \rho.b^{\lambda_{k-1} - \lambda_{k-2}}.e_{k-2} \in F_{k-3} \quad \text{avec} \quad \rho \in \mathbb{C}^*$$

Si on a $\lambda_k - \lambda_{k-1} = -1$, un tel x ne peut exister. Supposons donc $k \geq 3$ et $\lambda_k = \lambda_{k-1}$, c'est à dire $p_{k-1} = 1$. En remplaçant dans l'équation $(^*)$, on obtient que U_{k-2} doit vérifier l'équation suivante :

$$S_{k-2} + b^2.U'_{k-2} - (\lambda_k - \lambda_{k-2}).b.U_{k-2} = \rho.S_{k-1}.b^{\lambda_{k-1} - \lambda_{k-2}}. \tag{**}$$

Comme on a supposé $\lambda_{k-1} > \lambda_{k-2}$, c'est-à-dire $p_{k-2} \geq 2$, l'équation $(^{**})$ ne peut avoir de solution, puisque $S_{k-2}(0) = 1$. ■

Le lemme précédent admet la conséquence immédiate suivante :

Corollaire 3.2.7 *Soit E un thème $[\lambda]-$primitif de rang k stable. Alors ou bien la suite $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ est strictement croissante, ou bien elle est constante.*
Dans le cas où l'on a $\lambda_1 = \dots = \lambda_k$, nous dirons que le thème stable E est **spécial**.

PREUVE. Comme le cas où le rang est ≤ 2 est clair d'après le lemme 2.1.2, nous pouvons supposer $k \geq 3$. Commençons par montrer qu'il existe $j_0 \in [1, k]$ tel que l'on ait

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{j_0} < \lambda_{j_0+1} < \dots < \lambda_k.$$

Soit E un thème stable de rang k et d'invariants fondamentaux $\lambda_1, p_1, \dots, p_{k-1}$. Chaque p_j est au moins égal à 1. En effet si on a $p_j = 0$ cela revient à dire que $F_{j+1}\big/F_{j-1}$ est isomorphe à E_{λ_j, λ_j} qui n'est pas stable. Ceci contredit le corollaire 3.2.1.
Si tous les p_j sont au moins égaux à 2, la suite des λ_j est strictement croissante et on pose $j_0 = 1$. Sinon soit j_0 le plus grand entier dans $[1, k-1]$ tel que $p_j = 1$ pour $j \leq j_0 - 1$. On a donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_{j_0} < \lambda_{j_0+1}$. Donc le thème stable $E\big/F_{j_0-1}$ admet comme invariants fondamentaux $\mu_1 := \lambda_{j_0} < \mu_2 = \lambda_{j_0+1} \leq \dots \leq \mu_{k-j_0-1} = \lambda_k$. Nous voulons montrer qu'alors la suite $\mu_1, \dots, \mu_{k-j_0-1}$ est strictement croissante. Supposons qu'elle croisse strictement jusqu'à $\mu_{h-1} < \mu_h = \mu_{h+1}$, où l'on pose $\mu_0 = \lambda_{j_0-1}$ dans le cas $h = 1$. Alors la seconde assertion du lemme 3.2.6 appliquée au thème stable $F_{j_0+h+1}\big/F_{j_0+h-2}$ de rang 3 donne la contradiction cherchée.
On conclut alors grâce à la remarque 1) qui suit la démonstration du théorème de dualité 2.1.10. En effet pour $\delta \in \mathbb{Q}$ assez grand $E^* \otimes_{a,b} E_\delta$ est un thème, et il est stable d'après le corollaire 3.2.5. On a donc ou bien $j_0 = 1$, ou bien $j_0 = k$. ■

REMARQUES.

i) Le cas spécial impose les égalités $p_j = 1 \quad \forall j \in [1, k-1]$.

ii) Le lemme 4.4.3 de l'appendice 5.1 montre qu'il existe des thèmes stables spéciaux de rang 3. □

3.3 Forme canonique pour un thème primitif.

3.3.1 Supplémentaires.

Proposition 3.3.1 *Soit $E := \tilde{\mathcal{A}}\big/\tilde{\mathcal{A}}.P$ un thème $[\lambda]-$primitif de rang k où l'on a posé :*

1) $P := (a - \lambda_1.b).S_1^{-1} \dots S_{k-1}^{-1}.(a - \lambda_k.b)$.

2) $\lambda_1, p_1, \cdots, p_{k-1}$ sont les invariants fondamentaux de E.

3) $S_1, \cdots, S_{k-1}$ sont des éléments inversibles de $\mathbb{C}[[b]]$ de termes constants égaux à 1 tels que le coefficient de b^{p_j} dans S_j soit non nul.

Pour $j \in [1, k-1]$ *définissons* $P_j := (a - \lambda_{j+1}.b).S_{j+1}^{-1} \cdots S_{k-1}^{-1}.(a - \lambda_k.b)$.
Si $p_j + \cdots + p_{k-1} \geq k - j$ *notons* $q_j := p_j + \cdots + p_{j+h}$, *où* h *est le plus petit entier tel que* $p_j + \cdots + p_{j+h} \geq k - j$, *posons* $V_j := \oplus_{i=0}^{k-j-1} \mathbb{C}.b^i.e_{\lambda_j} \oplus \mathbb{C}.b^{q_j}.e_{\lambda_j}$.
Si $p_j + \cdots + p_{k-1} < k - j$ *posons* $V_j := \oplus_{i=0}^{k-j-1} \mathbb{C}.b^i.e_{\lambda_j}$.
Alors on a

$$E_{\lambda_j} = P_j.E_{\lambda_j} \oplus V_j.$$

Preuve. Commençons par remarquer que $E/F_j \simeq \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.P_j$ est un thème $[\lambda]-$primitif de rang $k - j$. On a donc, d'après lemme 5.1.1 rappelé au début de l'appendice,

$$dim_{\mathbb{C}}(Ext^1_{\tilde{\mathcal{A}}}(E/F_j, E_{\lambda_j})) - dim_{\mathbb{C}}(Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(E/F_j, E_{\lambda_j})) = k - j.$$

Mais on a $Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(E/F_j, E_{\lambda_j}) \simeq \mathbb{C}$ ou $\{0\}$ suivant que $\lambda_j \leq \lambda_k$ ou bien que $\lambda_j > \lambda_k$. En effet le seul quotient de rang 1 de E/F_j est $E/F_{k-1} \simeq E_{\lambda_k}$ d'après le corollaire 2.1.7.
On en déduit que l'on a $dim_{\mathbb{C}}(Ext^1_{\tilde{\mathcal{A}}}(E/F_j, E_{\lambda_j}) = k - j + 1$ ou bien $k - j$ suivant que $\lambda_j \leq \lambda_k$ ou bien $\lambda_j > \lambda_k$.
La résolution $\tilde{\mathcal{A}}-$libre de $E/F_j \simeq \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.P_j$ montre que l'espace vectoriel $Ext^1_{\tilde{\mathcal{A}}}(E/F_j, E_{\lambda_j})$ est isomorphe au conoyau de P_j agissant sur E_{λ_j}. La codimension de $P_j.E_{\lambda_j}$ dans E_{λ_j} est donc $k - j$ si $\lambda_j > \lambda_k$, et $k - j + 1$ si $\lambda_j \leq \lambda_k$. Dans le premier cas, l'inclusion de $P_j.E_{\lambda_j}$ dans $b^{k-j}.E_{\lambda_j}$ suffit pour prouver notre assertion.
Dans le cas $\lambda_j \leq \lambda_k$, ce qui équivaut à $p_j + \cdots p_{k-1} \geq k - j$, il s'agit de montrer que toute combinaison linéaire

$$\sum_{i=0}^{k-j-1} c_i.b^i.e_{\lambda_j} + \gamma.b^{q_j}.e_{\lambda_j}$$

qui est dans $P_j.E_{\lambda_j}$ est nulle. L'inclusion $P_j.E_{\lambda_j} \subset b^{k-j}.E_{\lambda_j}$ montre déjà que l'on doit avoir $c_i = 0 \quad \forall i \in [0, k-j-1]$. Il reste donc à montrer que $b^{q_j}.e_{\lambda_j} \notin P_j.E_{\lambda_j}$.
Pour cela remarquons déjà que si $x \in E_{\lambda_j}$ est de valuation $b-$adique égale à q, alors $P_j.x$ sera de valuation $b-$adique exactement $q + k - j$ si q n'est pas de la forme $p_j + \cdots + p_{j+h} - (k - j)$ pour un entier $h \in [0, k - j - 1]$. En effet, on peut ignorer les inversibles $S_{j+1}, \cdots, S_{k-1}$ qui ne changent pas la valuation $b-$adique, et constater qu'après l'action de $(a - \lambda_{j+h+1}.b) \dots (a - \lambda_k)$ ou bien on arrive à une valuation exactement égale à $q + k - (j + h)$ ou bien la valuation finale ne sera pas $q + k - j$. L'action de $(a - \lambda_{j+h}.b)$ sur $b^{q+k-(j+h)}.e_{\lambda_j}$ donnera

$$(q + \lambda_j + k - (j + h) - \lambda_{j+h}).b^{q+k-(j+h)+1}.e_{\lambda_j}$$

et l'on a

$$\begin{aligned}(q + \lambda_j + k - (j + h) - \lambda_{j+h}) &= q - \big[p_j + \cdots + p_{j+h-1} - h\big] + k - (j + h) \\ &= q - \big[p_j + \cdots + p_{j+h-1}\big] + k - j\end{aligned}$$

qui ne s'annule pas tant que $q \neq p_j + \cdots + p_{j+h-1} - (k-j)$.
Montrons maintenant que $b^{q_j}.e_{\lambda_j} \notin P_j.E_{\lambda_j}$. Pour cela raisonnons par l'absurde, et considérons $x \in E_{\lambda_j}$ de valuation $b-$adique égale à $q \geq 0$ et tel que $P_j.x = b^{q_j}.e_{\lambda_j}$. Si on a $q \neq p_j + \cdots + p_{j+h} - (k-j)$ pour chaque $h \in [0, k-j-1]$, alors on aura $q_j = q + k - j$ ce qui contredit la définition de q_j.
On a donc pour un $h \in [0, k-j-1]$ tel que $q = p_j + \cdots + p_{j+h} - (k-j) \geq 0$ ce qui implique $q \geq q_j - (k-j)$.
Mais si $q = q_j - (k-j)$ ceci contredit le fait que la valuation de $P_j.x$ soit q_j d'après le calcul précédent, et si on a $q > q_j$ la valuation de $P_j.x$ est strictement plus grande que q_j. On a donc bien la contradiction désirée. ■

Remarques.

1. Si on a $p_j \geq k-j$, alors on a $q_j = p_j$ et $V_j = \oplus_{i=0}^{k-j-1} \mathbb{C}.b^i.e_{\lambda_j} \oplus \mathbb{C}.b^{p_j}.e_{\lambda_j}$. Si $p_j \leq k-j-1$ alors on a encore $\mathbb{C}.b^{p_j}.e_{\lambda_j} \subset V_j$. On a donc toujours $b^{p_j}.e_{\lambda_j} \in V_j$, pour chaque $j \in [1, k-1]$.
2. Les sous-espaces vectoriels $V_j \subset E_{\lambda_j}$ sont indépendants des inversibles $S_1, \cdots, S_{k-1}$. Ils sont définis uniquement à partir des invariants fondamentaux $\lambda_1, p_1, \cdots, p_{k-1}$ du thème $[\lambda]-$primitif E.
3. Remarquons également que P_j ne dépend que de $\lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_k$ et $S_{j+1}, \ldots, S_{k-1}$, donc de l'idéal annulateur de la classe induite dans E/F_j par le générateur fixé dans E. □

3.3.2 Unicité dans le cas stable.

La proposition suivante est la clef du théorème d'unicité.

Proposition 3.3.2 *Soit E un thème $[\lambda]-$primitif stable, et soit e et e' deux générateurs de E. Soit $P_1 := (a - \lambda_2.b).S_2^{-1} \cdots S_{k-1}^{-1}.(a - \lambda_k.b)$ et supposons que*

i) $P := (a - \lambda_1.b).S_1^{-1}.P_1$ *engendre l'idéal annulateur de e dans E;*

ii) $P_1.e' = T_1.e_1$ *où* $e_1 := S_1^{-1}.P_1.e$;

iii) $e - e' \in F_{k-1}$.

Alors on a $T_1 - S_1 \in P_1.F_1$. En particulier, si $T_1.e_1$ et $S_1.e_1$ sont dans un même supplémentaire de $P_1.F_1$ on aura $S_1 = T_1$.

Preuve. Notons $[e]$ et $[e']$ les classes de e et e' dans E/F_1. Ce sont deux générateurs de ce thème de rang $k-1$ ayant le même idéal annulateur $\tilde{\mathcal{A}}.P_1$ dans E/F_1. Comme $[e-e'] \in F_{k-1}/F_1$, l'endomorphisme $\psi \in End_{\tilde{\mathcal{A}}}(E/F_1)$ défini par $\psi([e]) = [e-e']$ est de rang $\leq k-2$, et il existe, puisque E est stable, un élément $\varphi \in End_{\tilde{\mathcal{A}}}(E)$ de rang $rang(\psi)+1 \leq k-1$ qui induit ψ. Posons $\varepsilon := \varphi(e)$. On aura $P.\varepsilon = 0$ et comme φ est de rang $\leq k-1$ on aura même $P_1.\varepsilon = 0$ d'après le lemme 2.2.4.
Mais dire que φ induit ψ signifie que l'on a

$$\varepsilon = e - e' + U.e_1 \quad \text{avec} \quad U \in \mathbb{C}[[b]] \tag{@}$$

puisque $F_1 = \mathbb{C}[[b]].e_1$. On en déduit que

$$P_1.\varepsilon = 0 = S_1.e_1 - T_1.e_1 + P_1.U.e_1$$

ce qui prouve notre assertion. ■

Notation. Soient $\lambda_1, p_1, \dots, p_{k-1}$ les invariants fondamentaux d'un thème $[\lambda]-$primitif. Notons W_j l'ouvert affine de l'espace vectoriel $V_j \subset E_{\lambda_j}$ défini par les deux conditions: $S_j(0) = 1$ et le coefficients de b^{p_j} dans S_j est non nul.

Théorème 3.3.3 *Soit E un thème $[\lambda]-$primitif de rang $k \geq 2$. Si E est stable on a unicité de P tel que $E \simeq \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.P$ avec*

$$P := (a - \lambda_1.b).S_1^{-1} \cdots S_{k-1}^{-1}.(a - \lambda_k.b) \quad \text{et} \quad S_j \in W_j,\ S_j(0) = 1 \quad \forall j \in [1, k-1].$$

Démonstration. C'est une récurrence immédiate sur le rang du thème stable considéré en utilisant le fait que E stable implique la stabilité de E/F_1 et la proposition précédente 3.3.2. ■

Remarque. Le générateur e d'annulateur $\tilde{\mathcal{A}}.P$ est unique modulo le groupe des automorphismes de E qui est isomorphe au groupe des inversibles de l'algèbre $\mathbb{C}[x]/(x^k)$. □

3.3.3 La propriété d'unicité.

Le problème consistant à caractériser les thèmes primitifs possédant cette propriété d'unicité est assez délicat. Donnons déjà un critère de non unicité.

Lemme 3.3.4 *Soit E un thème $[\lambda]-$primitif de rang $k \geq 3$ non stable mais tel que E/F_1 soit stable. Notons*

- *e un générateur de E,*

- $P_1 := (a - \lambda_2.b).S_2^{-1} \cdots S_{k-1}^{-1}.(a - \lambda_k.b)$ *le générateur de l'annulateur de* $[e]$ *dans* E/F_1 *et*

- $P := (a - \lambda_1.b).S_1^{-1}.P_1$ *un générateur de l' annulateur de* e *dans* E.

Soit e_{λ_1} *le générateur standard de* F_1. *Alors il existe* e' *un générateur de* E *dont l'annulateur est* $Q := (a - \lambda_1.b).T_1^{-1}.P_1$, *où* $T_1 \in \mathbb{C}[[b]]$ *vérifie* $T_1(0) = 1$ *et* $(S_1 - T_1).e_{\lambda_1} \notin P_1.F_1$.

Preuve. Comme nous avons supposé E/F_1 stable, il existe $\psi \in End_{\tilde{\mathcal{A}}}(E/F_1)$ de rang $k-2$. Posons $\psi([e]) := [\eta]$; alors $\eta \in F_{k-1} \setminus F_{k-2}$, et la relation $P_1.[e] = 0$ dans E/F_1 donne que $P_1.\eta \in F_1$. Posons $P_1.\eta = Z_1.e_{\lambda_1}$, où $Z_1 \in \mathbb{C}[[b]]$. Si on peut trouver $U \in \mathbb{C}[[b]]$ tel que $P_1.U.e_{\lambda_1} = Z_1.e_{\lambda_1}$, alors $\eta - U.e_{\lambda_1}$ qui est dans $F_{k-1} \setminus F_{k-2}$ puisque $k \geq 3$, vérifiera $P_1.(\eta - U.e_{\lambda_1}) = 0$ et à fortiori $P.(\eta - U.e_{\lambda_1}) = 0$, nous fournissant un endomorphisme de rang $k-1$ de E ce qui contredit notre hypothèse.
D'autre part $P_1\eta$ est dans $b.E$ car $\eta \in F_{k-1} \subset a.E + b.E$, et on a donc $Z_1(0) = 0$, puisque F_1 est normal. Posons $e' := .e - \eta$; c'est un générateur de E, et il vérifie $P_1.e' = T_1.e_{\lambda_1}$ où $T_1 := S_1 - Z_1$. On a $T_1(0) = S_1(0) = 1$ et $(S_1 - T_1).e_{\lambda_1} = Z_1.e_{\lambda_1}$ n'est pas dans $P_1.F_1$, d'après ce qui précède. ■

Remarque. On notera que dans situation du lemme ci-dessus si $t \in \mathbb{C}$ le générateur $e_t := t.e + (1-t).e'$ vérifiera $P_1.e_t = (t.S_1 + (1-t).T_1).e_{\lambda_1}$. Donc si les coefficients de b^{p_1} dans S_1 et T_1 étaient différents, on pourrait trouver $t \in \mathbb{C}$ tel que ce coefficient devienne nul. Mais ceci est impossible pour un thème. Donc même si on trouve tout un sous-espace affine de dimension > 0 de S_1 possibles, le coefficient (non nul) de b^{p_1} est indépendant des choix. □

Définition 3.3.5 *Soit* E *un thème* $[\lambda]-$*primitif de rang* $k \geq 2$. *On dira que* E *a la proprieté U si on a unicité de* P *tel que* $E \simeq \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.P$ *avec*

$$P := (a - \lambda_1.b).S_1^{-1} \cdots S_{k-1}^{-1}.(a - \lambda_k.b) \quad \text{et} \quad S_j \in W_j,\ S_j(0) = 1 \quad \forall j \in [1, k-1].$$

On remarquera qu'en rang 1 et 2 tout thème vérifie la propriété U.

Comme tout E stable a cette propriété nous allons explorer quels sont les thèmes $[\lambda]-$primitifs *instables* (c'est-à-dire non stables) qui ont cependant cette propriété. Nous verrons qu'il y en a peu.

Proposition 3.3.6 *Si* E *est un thème* $[\lambda]-$*primitif instable vérifiant la propriété U, alors pour tout* $j \in [1, k-2]$ *le thème* E/F_j *est instable et vérifie également la propriété U.*
En particulier on a $p_{k-1} = 0$.
Réciproquement, si le quotient E/F_1 *vérifie la propriété U et vérifie*[4] *de plus l'égalité* $End_{\tilde{\mathcal{A}}}(E/F_1) = \mathbb{C}\,.\,\mathrm{id}$, *alors* E *vérifie la propriété U (et il est instable).*

[4]ce qui montre qu'il est instable.

Preuve. Le fait que E/F_j vérifie la propriété U si E la vérifie est immédiat. Si E/F_1 était stable, le lemme 3.3.4 montrerait que E ne vérifie pas la propriété U pourvu que le rang soit ≥ 3. Par récurrence sur $j \in [1, k-2]$, on en déduit que tous les E/F_j sont instables et vérifient la propriété U, pour $j \in [1, k-2]$. Le cas $j = k-2$ donne alors $p_{k-1} = 0$.
Pour montrer la réciproque considérons deux générateurs e et e' de E vérifiant les propriétés suivantes :

i) L'annulateur $\tilde{\mathcal{A}}.P$ de e dans E est de la forme donnée dans le théorème 3.3.3.

ii) Les images de e et e' dans E/F_1 ont même annulateur $\tilde{\mathcal{A}}.P_1$.

iii) La différence $e - e'$ est dans F_{k-1}.

iv) On a $P_1.e = S_1.e_{\lambda_1}$ et $P_1.e' = T_1.e_{\lambda_1}$ avec $S_1(0) = T_1(0) = 1$.

Il s'agit alors de montrer que l'on a $S_1 - T_1 \in P_1.F_1$. L'endomorphisme de E/F_1 donné en envoyant $[e]$ sur $[e - e']$ n'est pas surjectif, puisque $[e - e'] \in F_{k-1}/F_1$. Il est donc nul d'après notre hypothèse, ce qui signifie que $e - e' \in F_1$; ceci donne la conclusion cherchée. ∎

Un corollaire facile décrit complètement la situation en rang 3.

Corollaire 3.3.7 *Les thèmes $[\lambda]-$primitifs de rang 3 vérifiant la propriété U sont les thèmes stables et ceux qui vérifient $p_2 = 0$ qui sont nécessairement instables.*

Preuve. Comme tout thème de rang 2 vérifie la propriété U, si E est un thème $[\lambda]-$primitif de rang 3, qui est instable et vérifie la propriété U, alors E/F_1 est instable donc isomorphe à $E_{\lambda.\lambda}$ ce qui impose $p_2 = 0$. Mais réciproquement, si on a $p_2 = 0$, alors E/F_1 est isomorphe à $E_{\lambda.\lambda}$ qui vérifie la condition $End_{\tilde{\mathcal{A}}}(E/F_1) \simeq \mathbb{C}\,.\,\mathrm{id}$ de la proposition précédente. Donc tout thème primitif de rang 3 vérifiant $p_2 = 0$ vérifie la propriété U. ∎

Terminons par le cas extrême où $p_1 = \cdots = p_{k-1} = 0$.

Lemme 3.3.8 *Soit E un thème $[\lambda]-$primitif de rang k. Supposons que l'on ait $p_1 = \cdots = p_{k-1} = 0$. Alors on a unicité de P tel que $E \simeq \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.P$ avec*

$$P := (a - \lambda_1.b).S_1^{-1} \cdots S_{k-1}^{-1}.(a - \lambda_k.b) \quad \text{et} \quad S_j \in W_j,\ S_j(0) = 1 \quad \forall j \in [1, k-1].$$

Preuve. Prouver l'assertion suivante par récurrence sur le rang k est une conséquence facile de la remarque iv) qui suit le corollaire 3.2.7 et de la proposition 3.3.6:

- Soit E un thème $[\lambda]-$primitif de rang k vérifiant $p_1 = \cdots = p_{k-1} = 0$. Alors il vérifie la propriété U et l'égalité $End_{\tilde{\mathcal{A}}}(E) = \mathbb{C}\,.\,\mathrm{id}$.

∎

3.4 Thèmes stables généraux.

Nous allons étendre une partie des considérations précédentes aux thèmes généraux.

Lemme 3.4.1 *Soit* E *un thème de rang* k. *Alors l'espace vectoriel* $Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(E, E)$ *est de dimension au plus égale à* k.

Preuve. Comme le résultat est connu dans le cas $[\lambda]-$primitif, nous pouvons faire une récurrence sur le cardinal q de l'ensemble $Exp(E)$, le cas $q = 1$ étant acquis. Supposons le résultat connu pour $q \geq 1$ et montrons-le pour $q + 1$. Soit donc E un thème avec $Card\{Exp(E)\} = q + 1$ et fixons $[\lambda] \in Exp(E)$. On a une suite exacte

$$0 \to E[\neq \lambda] \to E \to E/[\lambda] \to 0 \tag{1}$$

où $E/[\lambda]$ est $[\lambda]-$primitif, et où $Card\{Exp(E[\neq \lambda]\} = q$. On a alors le diagramme déduit de (1)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(E, E[\neq \lambda]) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(E, E) \arrow[r] & Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(E, E/[\lambda]) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\ & Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(E[\neq \lambda], E[\neq \lambda]) & & Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(E/[\lambda], E/[\lambda]) & \end{tikzcd}$$

et de l'additivité de la dimension permet de conclure grâce à l'hypothèse de récurrence. ■

Proposition 3.4.2 *Soit* E *un thème de rang* k *; les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) *Il existe une injection* $\tilde{\mathcal{A}}-$*linéaire de* E *dans* Ξ *dont l'image est invariante par la monodromie* $\mathcal{T}$.

2) *Il existe un unique sous-thème de* Ξ *isomorphe à* E.

3) *L'espace vectoriel* $Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(E, E)$ *est de dimension* k.

Preuve. L'implication $2) \Rightarrow 1)$ est claire car $\mathcal{T} \circ j$ est une injection $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaire de E dans Ξ dès que j est injection $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaire de E dans Ξ.
Montrons $3) \Rightarrow 2)$. Soit $j : E \to \Xi$ une injection $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaire de E dans Ξ. La composition avec j donne une injection $\mathbb{C}-$linéaire

$$Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(E, E) \to Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(E, \Xi).$$

Comme ces deux espaces vectoriels ont même dimension k, le premier par hypothèse, le second en vertu du théorème 2.2.1 de [B.05], c'est une bijection. En particulier toute injection $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaire de E dans Ξ a son image contenue dans $j(E)$, ce qui donne la propriété 2).

Montrons enfin que 1) $\Rightarrow$ 3). Pour cela montrons d'abord par récurrence sur l'entier $q := Card\{Exp(E)\}$ que si E vérifie 3) alors le polynôme minimal de l'action de $\mathcal{T}$ sur E est de degré exactement le rang de E. L'assertion étant connue pour $q = 1$, d'après la proposition 3.2.1 et le fait que $\mathcal{T} - exp(2i\pi.\lambda).\,\mathrm{id}$ induise un endomorphisme de rang $k-1$, supposons-la vérifiée pour $q \geq 1$ et montrons-là pour $Card\{Exp(E)\} = q+1$, en reprenant les notations utilisées dans la preuve du lemme ci-dessus.
La suite exacte (1) montre déjà, grâce à l'hypothèse de récurrence, que 3) est vérifiée pour $E[\neq \lambda]$ et aussi pour $E\big/[\lambda]$ puisque qu'en composant l'injection considérée de E dans Ξ avec le quotient $\Xi \to (\Xi\big/\Xi_{\neq\lambda}) \simeq \Xi_\lambda$ on obtient une injection de $E\big/[\lambda]$ dans Ξ_λ qui est stable par $\mathcal{T}$.
On conclut alors en remarquant que le polynôme minimal de $\mathcal{T}$ agissant sur E[5] divise les polynômes minimaux de $\mathcal{T}$ agissant sur $E[\neq \lambda]$ et $E\big/[\lambda]$ respectivement. Comme ils sont premiers entre eux, il divise le produit qui, grâce à l'hypothèse de récurrence est de degré $rg(E[\neq \lambda]) + rg(E\big/[\lambda]) = rg(E)$. ■

Définition 3.4.3 *On dira qu'un thème est* **stable** *s'il vérifie les propriétés 1) , 2), 3) de la proposition précédente.*

Remarques.

1) Il est clair que cette définition est compatible avec celle donnée dans le cas $[\lambda]-$primitif.

2) Le dual décalé $E^* \otimes E_\delta$ pour $\delta \in \mathbb{Q}$ assez grand d'un thème stable est encore un thème stable : en effet dès que le décalage sera suffisant pour avoir un (a,b)-module monogène géométrique, la condition 3) de la proposition précédente sera vérifiée, puisque $\varphi \mapsto \varphi^* \otimes \mathrm{id}$ donne un isomorphisme linéaire de $End_{\tilde{\mathcal{A}}}(E)$ sur $End_{\tilde{\mathcal{A}}}(E^* \otimes E_\delta)$.

Lemme 3.4.4 *Tout sous-thème normal et tout thème quotient d'un thème stable est stable.*

Preuve. D'après la remarque 2) ci-dessus il suffit de traiter le cas des quotients. Par récurrence sur le rang du sous-thème normal par lequel on quotiente, on se ramène au cas où l'on quotiente par un sous-thème normal de rang 1. Mais si $E_{\lambda+p}$ est un sous-thème normal de rang 1 de $E \subset \Xi$ stable par $\mathcal{T}$, l'image de E par $f_\lambda \oplus \mathrm{id}_{\mu\neq\lambda} : \Xi \to \Xi$ de E est un sous-thème de Ξ isomorphe à $E\big/E_{\lambda+p}$ qui est stable par $\mathcal{T}$ car f_λ commute à $\mathcal{T}$. Donc $E\big/E_{\lambda+p}$ est stable. ■

[5]remarquer que comme $Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(E,E)$ est de dimension au plus égale à k ce polynôme minimal est de degré au plus k.

REMARQUES.

1) Si chaque partie coprimitive d'un thème est stable, alors le thème est stable : en effet, il suffit de composer les injections des parties $[\lambda]-$coprimitives avec les quotients et de prendre la somme directe des morphismes dans les Ξ_λ ainsi obtenus pour avoir une injection dont l'image dans Ξ est stable par la monodromie; en effet la monodromie de Ξ se décompose en somme directe des monodromies de chacun des Ξ_λ.

2) Un argument simple de dualité montre, à partir de la remarque précédente que si chaque partie $[\lambda]-$primitive d'un thème est stable, alors le thème est stable.

4 Familles holomorphes de thèmes $[\lambda]-$primitifs.

4.1 Définitions et premiers exemples.

4.1.1 Définitions.

Soit X un espace complexe. Nous noterons $\mathcal{O}_X[[b]]$ le faisceau sur X défini par le préfaisceau

$$U \to \mathcal{O}_X(U)[[b]].$$

C'est un faisceau de $\mathcal{O}_X-$algèbres. Pour $\mathcal{J} \subset (\mathcal{O}_X)^p$ un sous-faisceau de $\mathcal{O}_X-$modules (resp. $\mathcal{O}_X-$cohérent) de $(\mathcal{O}_X)^p$, on notera $\mathcal{J}[[b]]$ le sous-faisceau de $\mathcal{O}_X[[b]]-$modules (resp. $\mathcal{O}_X[[b]]-$cohérent) de $(\mathcal{O}_X[[b]])^p$ qui est engendré par $\mathcal{J}$.

On notera que pour X de Stein on a le théorème B de Cartan pour le faisceau $\mathcal{O}_X[[b]]$[6], à savoir que $H^i(X, \mathcal{O}_X[[b]]) = 0, \forall i \geq 1$.

Définition 4.1.1 *Soit X un espace complexe. Un faisceau de $\mathcal{O}_X-$(a,b)-modules $\mathbb{E}$ sur X est la donnée d'un faisceau localement libre de type fini de $\mathcal{O}_X[[b]]-$modules muni d'un morphisme de faisceaux*

$$a : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$$

qui est $\mathcal{O}_X-$linéaire, continu pour la topologie $b-$adique de $\mathbb{E}$, et satisfait la relation de commutation $a.b - b.a = b^2$.
Un morphisme entre deux faisceaux de $\mathcal{O}_X-$(a,b)-modules sur X sera un morphisme de faisceaux de $\mathcal{O}_X[[b]]-$modules qui commute aux actions respectives de a.

[6] et même pour tout $\mathcal{O}_X[[b]]$-module cohérent.

EXEMPLE. Pour $\lambda \in \mathbb{Q}^{+*}$ et N entier considérons

$$\Xi_{X,\lambda}^{(N)} := \oplus_{j=0}^{N}\mathcal{O}_X[[b]].e_{\lambda,j} \quad \text{avec} \quad e_{\lambda,j} := s^{\lambda-1}\frac{Log\, s)^j}{j!}$$

muni de l'opération a définie par récurrence sur $j \geq 0$ de la façon suivante :

$$a.e_{\lambda,0} = \lambda b.e_{\lambda,0}$$
$$a.e_{\lambda,j} = \lambda b.e_{\lambda,j} + b.e_{\lambda,j-1}, \quad \forall j \geq 1.$$

NOTATION. On notera $\Xi_{X,\lambda}^{(N)} := \mathcal{O}_X \widehat{\otimes}\ \Xi_{\lambda}^{(N)}$. On notera aussi $\Xi_{X,\lambda} := \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \Xi_{\lambda}^{(N)}$ et $\Xi_X := \oplus_{\lambda\in]0,1]\cap\mathbb{Q}}\, \Xi_{X,\lambda}$.
On remarquera que $\Xi_{X,\lambda}^{(N)}$ est à pôle simple, c'est-à-dire que $a.\Xi_{X,\lambda}^{(N)} \subset b.\Xi_{X,\lambda}^{(N)}$. □

Soit $x \in X$ un point (fermé). On a un morphisme d'évaluation en x des fonctions holomorphes

$$\mathcal{O}(X) \to \mathbb{C} \simeq \mathcal{O}(X)/\mathcal{M}_x$$

où $\mathcal{M}_x \subset \mathcal{O}_X$ est le sous-faisceau des fonctions holomorphes nulles en x.
Si $\mathbb{E}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X-$(a,b)-modules sur X, on aura, de façon analogue une application d'évaluation en x

$$\mathbb{E} \to E(x) := \mathbb{E}/\mathcal{M}_x[[b]].\mathbb{E}$$

où $E(x)$ est un (a,b)-module qui sera appelé la fibre en x du faisceau $\mathbb{E}$.
On considérera un faisceau de (a,b)-modules sur X comme une famille de (a,b)-modules paramétrée par X.

CONVENTION. Nous appellerons application holomorphe d'un espace complexe X à valeurs dans $\Xi_{\lambda}^{(N)}$ (resp. $\Xi_\lambda := \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \Xi_{\lambda}^{(N)}$, Ξ) une section globale du faisceau $\Xi_{X,\lambda}^{(N)}$ (resp. $\Xi_{X,\lambda}, \Xi_X$). □

Définition 4.1.2 *Une application holomorphe $\varphi : X \to \Xi$ d'un espace complexe X à valeurs dans Ξ sera dite* **k-thématique** *si la condition suivante est satisfaite:*

- *Le sous-$\mathcal{O}_X[[b]]-$module $\mathbb{E}_\varphi$ de Ξ_X engendré par les $a^\nu.\varphi$, $\nu \in \mathbb{N}$ est libre de rang k et de base $\varphi, a.\varphi, \dots, a^{k-1}.\varphi$.*

Pour chaque $x \in X$ notons $E(\varphi(x)) := \mathbb{E}_\varphi/\mathcal{M}_x.\mathbb{E}_\varphi \simeq \tilde{\mathcal{A}}.\varphi(x) \subset \Xi$. C'est un thème de rang k. On a, de plus, la restriction suivante:

Lemme 4.1.3 *Soit X un espace complexe réduit et soit $\varphi : X \to \Xi$ une application holomorphe k-thématique; le polynôme de Bernstein $B_{\varphi(x)}$ de $E(\varphi(x))$ est localement constant sur X.*

Preuve. Écrivons sur X :

$$a^k.\varphi = \sum_{j=0}^{k-1} \quad S_{k-j}.a^j.\varphi$$

où $S_1, \cdots, S_k$ sont des sections sur X du faisceau $\mathcal{O}_X[[b]]$. Comme pour chaque $x \in X$ $\tilde{\mathcal{A}}.\varphi(x) \subset \Xi$ est un thème de rang k, son élément de Bernstein est donné par $a^k - \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_{k-j}(x).b^{k-j}.a^j$, où $\sigma_{k-j}(x)$ est le coefficient de b^{k-j} dans $S_{k-j}(x)$. On notera que $\sigma_{k-j}(x).b^{k-j}$ est la forme initiale de $S_{k-j}(x)$ quand celle-ci n'est pas de degré strictement plus grand que $k-j$.
Mais $x \mapsto \sigma_{k-j}(x)$ est une fonction holomorphe sur X qui ne prend que des valeurs dans $\mathbb{Q}$. Elle est donc localement constante. ■

Corollaire 4.1.4 *Soit X un espace complexe réduit et soit $\varphi : X \to \Xi_\lambda$ une application holomorphe k-thématique, les invariants fondamentaux $\lambda_1, p_1, \dots, p_{k-1}$ des thèmes $\tilde{\mathcal{A}}.\varphi(x) \subset \Xi_\lambda$ sont localement constants sur X.*

Preuve. Comme pour un thème $[\lambda]-$primitif de rang k les racines du polynôme de Bernstein sont les nombres $k-(\lambda_j+j)$ et que la suite des λ_j+j est croissante, le fait que le polynôme de Bernstein soit localement constant sur X implique la locale constance des invariants fondamentaux. ■

Remarque. Même quand X est réduit, il ne suffit pas, en général, de vérifier que pour chaque $x \in X$ le (a,b)-module $E(\varphi(x))$ est un thème de rang k pour satisfaire la condition de la définition 4.1.2 comme le montre l'exemple suivant :
Soit $\lambda \in \mathbb{Q}, \lambda > 1$, et posons pour $z \in \mathbb{C}$:

$$\varphi(z) := s^{\lambda-1}.Log\, s + (z+b).s^{\lambda-2} = s^{\lambda-1}.Log\, s + z.s^{\lambda-2} + \frac{1}{\lambda-1}.s^{\lambda-1}.$$

Alors l'élément de Bernstein de $E(z) := \tilde{\mathcal{A}}.\varphi(z)$ pour $z \neq 0$ est $(a-\lambda.b)(a-\lambda.b)$ alors que l'élément de Bernstein de $E(0)$ vaut $(a-(\lambda+1).b)(a-\lambda.b)$. On conclut grâce au lemme précédent. □

Exemples. Soit $\varphi : X \to \Xi_\lambda^{(k-1)} = \oplus_{j=0}^{k-1} \mathbb{C}[[b]].e_{\lambda,j}$ une application holomorphe. Supposons que le coefficient de $e_{\lambda,k-1}$ soit de la forme $b^n.S(b,x)$ où S est un inversible de l'algèbre[7] $\mathcal{O}(X)[[b]]$, et que la valuation en b de $\varphi - b^n.S.e_{\lambda,k-1}$ soit strictement plus grande que n. Alors le sous-faisceau

$$\mathbb{E}_\varphi := \sum_{i=0}^{k-1} \mathcal{O}_X[[b]].a^i.\varphi \ \subset \ \Xi_{X,\lambda}^{(k-1)}$$

[7] ce qui revient à dire que l'élément de $\mathcal{O}(X)$ qui est le terme constant en b de S est un inversible de $\mathcal{O}(X)$.

est libre de rang k sur $\mathcal{O}_X[[b]]$, stable par a.
En effet, on se ramène immédiatement au cas où $S \equiv 1$, et on constate alors que

$$\psi := (a - (\lambda + n).b).\varphi$$

vérifie la même hypothèse que φ en remplaçant k par $k-1$ et n par $n+1$. On conclut par une récurrence facile.
On notera que dans cet exemple (qui est bien particulier) on a $\lambda_k = \lambda + n$ puis $\lambda_{k-1} = \lambda + n + 1, \dots$ ce qui signifie que $p_1 = p_2 = \cdots = p_{k-1} = 0$.
Le lecteur trouvera dans l'appendice 5.3 dans le corollaire 5.3.4 une méthode générale et systématique pour construire des applications $k-$thématiques. $\square$

Définition 4.1.5 *Soit X un espace complexe réduit et soit $\mathbb{E}$ un faisceau de (a,b)-modules sur X. Nous dirons que $\mathbb{E}$ est une* **famille holomorphe de thèmes de rang k paramétrée par** X *si la condition suivante est remplie :*

- *Il existe un recouvrement ouvert $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ de X et pour chaque $\alpha \in A$ une application holomorphe thématique*

$$\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to \Xi$$

et un isomorphisme de faisceaux de $\mathcal{O}_{\mathcal{U}_\alpha}[[b]]-$modules

$$\mathbb{E}_{|\mathcal{U}_\alpha} \simeq \mathbb{E}_{\varphi_\alpha}$$

compatible aux $\tilde{\mathcal{A}}-$structures.

Remarques.

i) Dans une famille holomorphe de thèmes de rang k, le polynôme de Bernstein est localement constant d'après 4.1.3.

ii) Si, de plus, $E(x)$ est un thème $[\lambda]-$primitif pour chaque $x \in X$, les invariants fondamentaux sont localement constants sur X d'après 4.1.4.

iii) Quand on considère une famille holomorphe de thèmes $[\lambda]-$primitifs de rang k on peut supposer que chaque application φ_α est à valeurs dans $\Xi_\lambda^{(k-1)}$ où $[\lambda] \cap]0,1] = \{\lambda\}$. $\square$

4.1.2 Premiers exemples : Famille holomorphes de thèmes $[\lambda]-$primitifs de rang 1 et 2.

Le cas du rang 1 se déduit de la remarque simple suivante :
Soit X un espace complexe réduit et connexe et soit $\varphi : X \to \Xi_\lambda^{(N)}$ une application $1-$thématique. Alors il existe une section $S_0 \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X[[b]])$ qui est inversible et un entier n tel que $S_0.\varphi = s^{\lambda+n-1}$. On en déduit que le faisceau $\mathbb{E}_\varphi$ est isomorphe

au faisceau $\mathcal{O}\widehat{\otimes} E_{\lambda+n}$ et donc à l'application holomorphe constante $X \to E_{\lambda+n}$ dont la valeur en chaque point est un générateur standard $e_{\lambda+n}$ de $E_{\lambda+n}$ qui vérifie $a.e_{\lambda+n} = (\lambda+n).b.e_{\lambda+n}$.

Le cas du rang 2 est décrit par la proposition et le lemme qui suivent.

Proposition 4.1.6 *Fixons $[\lambda] \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \lambda_1 > 1, \lambda_1 \in [\lambda]$ ainsi que $p \in \mathbb{N}^*$. Soit X un espace complexe réduit connexe et soit $\varphi : X \to \Xi_\lambda$ une application holomorphe 2-thématique, telle que les invariants fondamentaux des thèmes associés soient λ_1 et $p_1 := p$. Alors il existe deux applications holomorphes $\alpha, \beta : X \to \mathbb{C}^*$ telles que l'on ait, pour chaque $x \in X$ l'égalité*

$$\tilde{\mathcal{A}}.\varphi(x) = \tilde{\mathcal{A}}.\psi(x)$$

où

$$\psi(x) := s^{\lambda_1+p-2}.Log\, s + \beta(x).(1+\alpha(x).b^p).s^{\lambda_1-1}. \tag{@}$$

Preuve. Il n'est pas restrictif de supposer que l'on a

$$\varphi(x) = s^{\lambda_1+p-2}.Log\, s + \Sigma(x).s^{\lambda_1-2} \tag{1}$$

où $\Sigma : X \to \mathbb{C}[[b]]$ est holomorphe et $\Sigma(x)$ est un inversible de $\mathbb{C}[[b]]$ pour chaque $x \in X$. Ceci résulte du fait que le coefficient de $s^{\lambda_1+p-2}.Log\, s$ doit être un inversible de $\mathbb{C}[[b]]$ dépendant holomorphiquement de X, et que les autres termes dans $\varphi(x)$ doivent être dans $\mathbb{C}[[b]].s^{\lambda_1-2}$ pour avoir un thème de rang 2 avec $\lambda_2 = \lambda_1+p-1$. La définition de $\lambda_1 \in [\lambda]$ impose alors l'inversibilité de $\Sigma(x)$ pour tout $x \in X$.
On déduit de (1) la relation

$$\begin{aligned}(a-(\lambda_1+p-1).b).\varphi(x) &= \frac{s^{\lambda_1+p-1}}{\lambda_1+p-1} + \Sigma(x).s^{\lambda_1-1} + b^2.\Sigma(x)'.s^{\lambda_1-2} + \\ &\qquad - (\lambda_1+p-1).b.\Sigma(x).s^{\lambda_1-2} \\ &= \big(b^2.\Sigma(x)' - p.b.\Sigma(x) + \gamma.b^{p+1}\big).s^{\lambda_1-2}\end{aligned}$$

où $\gamma := (\lambda_1-1).\lambda_1 \dots (\lambda_1+p-2)$ et où l'on a noté $\Sigma(x)'$ la dérivée en b de $\Sigma(x) \in \mathbb{C}[[b]]$. On a donc

$$(a-(\lambda_1+p-1).b).\varphi(x) = S(x).s^{\lambda_1-1} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1-1).S(x) := b.\Sigma(x)' - p.\Sigma(x) + \gamma.b^p.$$

Posons $S(x) = S_0(x) + S_p(x).b^p + b.\tilde{S}(x)$, où $S_0(x) \in \mathbb{C}$ et où $\tilde{S}(x) \in \mathbb{C}[[b]]$ n'a plus de terme en b^{p-1}. On peut alors trouver une application holomorphe $T : X \to \mathbb{C}[[b]]$ vérifiant :

$$b^2.T(x)' - (p-1).b.T(x) = b.\tilde{S}(x).$$

Soit $\psi : X \to \Xi_\lambda^{(1)}$ l'application holomorphe définie en posant

$$\psi(x) := \varphi(x) - T(x).s^{\lambda_1-1}.$$

Comme $\tilde{\mathcal{A}}.\varphi(x)$ contient $\mathbb{C}[[b]].s^{\lambda_1-1}$ pour chaque $x \in X$, ce qui se traduit par l'inversibilité de la fonction holomorphe $S_0 : X \to \mathbb{C}$, qui se déduit de l'inversibilité de Σ dans $\mathcal{O}(X)[[b]]$, on aura l'égalité des thèmes $\tilde{\mathcal{A}}.\varphi(x)$ et $\tilde{\mathcal{A}}.\psi(x)$ pour chaque $x \in X$.
Mais par construction on a

$$(a - (\lambda_1 + p - 1).b).\psi(x) = (S_0(x) + S_p(x).b^p).s^{\lambda_1-1}.$$

Comme $S_0(x) \neq 0$ et $S_p(x) \neq 0$ pour chaque $x \in X$ on peut finalement définir, grâce aux relations $(\lambda_1 - 1).S_p(x) = \gamma$ et $(\lambda_1 - 1).S_0(x) = -p.\Sigma_0(x)$:

$$\alpha(x) := -\frac{\gamma}{p.\Sigma_0(x)}, \quad \beta(x) := S_0(x)$$

ce qui donne l'identité (@). ■

Lemme 4.1.7 *Fixons* $[\lambda] \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \lambda_1 > 1, \lambda_1 \in [\lambda]$. *Soit* X *un espace complexe réduit connexe et soit* $\varphi : X \to \Xi_\lambda$ *une application holomorphe 2-thématique, telle que les invariants fondamentaux des thèmes associés soient* λ_1 *et* $p_1 := 0$. *Alors il existe une application holomorphe* $\beta : X \to \mathbb{C}^*$ *telles que l'on ait, pour chaque* $x \in X$ *l'égalité*

$$\tilde{\mathcal{A}}.\varphi(x) = \tilde{\mathcal{A}}.\psi(x)$$

où

$$\psi(x) := s^{\lambda-2}.Log\, s + \beta(x).s^{\lambda-1}. \qquad (@)$$

Preuve. C'est une variante simple de la preuve de la proposition précédente qui est laissée au lecteur. ■

Remarque. On verra que la proposition précédente signifie que la famille holomorphe $(E_{\lambda,p}(\alpha))_{\alpha\in\mathbb{C}^*}$ de thèmes de rang 2 est universelle pour $\lambda > 1$ et $p \geq 1$ au sens de la définition 4.3.2.
De même, lemme précédent signifiera que la famille constante (paramétrée par un point !) est universelle au sens de la définition 4.3.2. □

Définition 4.1.8 *Pour un thème* $[\lambda]-$*primitif* E *de rang 2 et d'invariant fondamentaux* λ_1, p_1 *avec* $p_1 \geq 1$ *nous appellerons* **invariant holomorphe** *le nombre complexe (non nul)* α *tel que* E *soit isomorphe à* $E_{\lambda_1+p,\lambda_1}(\alpha)$.

Donc α est le nombre complexe donné par la proposition précédente appliquée à la famille constante égale à E.
Il sera commode de convenir que pour $p = 0$ l'invariant holomorphe de $E_{\lambda,\lambda}$ est égal à 1.

Remarque. Comme le dual de $E_{\lambda,\lambda}$ est $E_{-\lambda+1,-\lambda+1}$, on constate que si le rationnel δ vérifie $\delta > \lambda$ alors $(E_{\lambda,\lambda})^* \otimes_{a,b} E_\delta$ est un thème primitif de rang 2 d'invariants fondamentaux $\mu, 0$ (donc isomorphe à $E_{\mu,\mu}$) avec $\mu = -\lambda + 1 + \delta$.

De même le dual de $E_{\lambda+p,\lambda}(\alpha)$ est $E_{-\lambda-p+1,-\lambda}((-1)^p.\alpha)$, et pour δ rationnel vérifiant $\delta > \lambda + p$, le (a,b)-module $(E_{\lambda+p,\lambda}(\alpha))^* \otimes_{a,b} E_\delta$ sera un thème primitif de rang 2 d'invariants fondamentaux $-\lambda - p + \delta + 1, p$ et d'invariant holomorphe $(-1)^p.\alpha$.

Donc quitte à tensoriser[8] par E_δ avec δ rationnel assez grand (en fait plus grand que λ_1), la famille duale d'une famille holomorphe de thèmes $[\lambda]-$primitifs de rang 2 est holomorphe.

4.1.3 Critère d'holomorphie.

La proposition ci-dessous montre que dans une famille holomorphe de thème $[\lambda]-$primitif, la suite de Jordan-Hölder est "holomorphe".

Proposition 4.1.9 *Soit X un espace complexe réduit connexe et soit $\mathbb{E}$ une famille holomorphe de thèmes $[\lambda]-$primitifs de rang k paramètrée par X.*
Notons $\lambda, p_1, \dots, p_{k-1}$ les invariants fondamentaux communs à chaque thème de cette famille. Pour chaque $j \in [0,k]$ il existe une famille holomorphe unique $\mathbb{F}_j$ de thèmes $[\lambda]-$primitifs de rang j paramètrée par X et vérifiant les propriétés suivantes :

- *i)* $\mathbb{F}_j \subset \mathbb{F}_{j+1}$ *et* $\mathbb{F}_0 = 0$ *et* $\mathbb{F}_k = \mathbb{E}$ *;*
- *ii) pour chaque $x \in X$ le thème $F_j(x)$ est* **le** *sous-thème normal de rang j de $E(x)$.*
- *iii) La famille $\mathbb{E}/\mathbb{F}_j$ des thèmes quotients $E(x)\big/F_j(x)$ est holomorphe.*

Preuve. Le problème est local sur X, et l'on peut supposer que l'on a une application holomorphe $k-$thématique

$$\varphi : X \to \Xi_\lambda^{(k-1)}$$

telle que $\mathbb{E} = \mathbb{E}_\varphi$. Posons

$$\varphi(x) := \sum_{j=0}^{k-1} \Sigma_j(x).s^{\lambda-1}.\frac{(Log\, s)^j}{j!}$$

[8]pour rendre les (a,b)-modules géométriques.

où $\Sigma_j \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X[[b]])$. On a $\Sigma_{k-1} = b^{p_1+\cdots+p_{k-1}-(k-1)}.\tilde{\Sigma}_{k-1}$ avec $\tilde{\Sigma}_{k-1}$ inversible dans $\mathcal{O}(X)[[b]]$. Donc, quitte à remplacer φ par $\tilde{\Sigma}_{k-1}^{-1}.\varphi$ ce qui ne change pas $\mathbb{E}_\varphi$, on peut supposer que $\tilde{\Sigma}_{k-1} \equiv 1$, c'est à dire que l'on a

$$\varphi - s^{\lambda_k - 1}.\frac{(Log\, s)^{k-1}}{(k-1)!} \in \Gamma(X, \Xi_{X,\lambda}^{(k-2)}).$$

Posons alors $\psi := (a - \lambda_k.b).\varphi$. Alors ψ est $(k-1)-$thématique, puisque $\psi, a.\psi, \dots, a^{k-2}.\psi$ est $\mathcal{O}(X)[[b]]-$libre et engendre $\mathbb{E}_\psi$:
si on a $\sum_{j=0}^{k-2} U_j.a^j.\psi = 0$ avec $U_j \in \mathcal{O}(X)[[b]]$, on aura

$$\sum_{j=0}^{k-2} U_j.a^{j+1}.\varphi - \sum_{j=0}^{k-2} U_j.a^j.\lambda_k.b.\varphi = 0$$

ce qui impose successivement, puisque $a^j.b.\varphi \in \sum_{h=0}^{j} \mathcal{O}(X)[[b]].a^h.\varphi$, les relations

$$U_{k-2} = 0, U_{k-3} = 0 \dots, U_1 = 0$$

car φ est thématique.
On obtient ainsi la famille holomorphe $\mathbb{F}_{k-1} := \mathbb{E}_\psi$, et on conclut par une récurrence immédiate.
La propriété *iii)* se déduit facilement par récurrence du cas $j = 1$. Dans ce cas il suffit de montrer que la composée $\theta := f_\lambda \circ \varphi : X \to \Xi_\lambda^{(k-2)}$ est $(k-1)-$thématique, puisque $F_1(x) = Ker\, f_\lambda \cap \tilde{\mathcal{A}}.\varphi(x)$ d'après le lemme 2.2.2. Pour cela montrons que $\sum_{j=0}^{k-2} S_j(x).a^j.\varphi(x) \in \Xi_\lambda^{(0)}$ implique $S_j(x) = 0, \forall j \in [0, k-2]$. En effet, sinon on aurait un entier $q \geq 0$ et un inversible T de $\mathbb{C}[[b]]$ qui vérifieraient

$$\sum_{j=0}^{k-2} S_j(x).a^j.\varphi(x) = T.s^{\lambda+q-1}.$$

Alors $(a - (\lambda + q).b).T^{-1}.\big(\sum_{j=0}^{k-2} S_j(x).a^j\big)$ qui est un polynôme en a de degré inférieur ou égal à $k-1$ annulerait $\varphi(x)$ contredisant le fait que $E(x)$ est de rang k. ■

Théorème 4.1.10 (Critère d'holomorphie) *Soit $E(\sigma)_{\sigma \in X}$ une famille de thèmes $[\lambda]-$primitifs d'invariants fondamentaux $\lambda_1, p_1, \dots, p_{k-1}$, où l'on suppose $k \geq 2$. Soit $s_{k-1} : X \to \mathbb{C}$ l'application définie en associant à $\sigma \in X$ l'invariant holomorphe du thème $[\lambda]-$primitif de rang 2 $E(\sigma)\big/F_{k-2}(\sigma)$. Alors la famille $E(\sigma)_{\sigma \in X}$ est holomorphe si et seulement si*

i) s_{k-1} est holomorphe sur X ;

ii) la famille $F_{k-1}(\sigma))_{\sigma \in X}$ est holomorphe.

Remarque. Il est équivalent de demander à la fonction s_{k-1} dêtre holomorphe ou de demander que la famille de thème $[\lambda]-$primitifs de rang 2 $(E(\sigma)/F_{k-2}(\sigma))_{\sigma\in X}$ soit holomorphe.
On notera que l'on aura pour chaque $\sigma \in X$ un isomorphisme

$$E(\sigma)/F_{k-2}(\sigma) \simeq E_{\lambda_k,\lambda_{k-1}}(s_{k-1}(\sigma)) \simeq \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.(a-\lambda_{k-1}.b).(1+s_{k-1}(\sigma).b^{p_{k-1}})^{-1}.(a-\lambda_k.b).$$

Donc le théorème précédent est un critère nécessaire et suffisant d'holomorphie, qui permet, par récurrence sur le rang, de se ramener au cas du rang 2. $\square$

La démonstration de ce théorème utilisera le lemme suivant :

Lemme 4.1.11 *Soit* $j, q \in \mathbb{N}$ *et* $\lambda \in]0,1] \cap \mathbb{Q}$. *Notons* $H(j,q))$ *l'hyperplan de* $\Xi_\lambda^{(j)}$ *correspondant à l'annulation du coefficient de* $b^q.e_0$.
Alors l'application $(a-(\lambda+q).b) : H(j,q) \oplus \mathbb{C}.b^q.e_{j+1} \to b.\Xi_\lambda^{(j)}$ *est un isomorphisme* $\mathbb{C}-$*linéaire d'espaces de Frechet. En conséquence l'inverse est une application* $\mathbb{C}-$*linéaire continue.*

Preuve. On vérifie immédiatement l'égalité suivante pour tout couple d'entiers $(h,m) \in \mathbb{N}^2$

$$(a-(\lambda+q).b).b^m.e_h = (m-q).b^{m+1}.e_h + b^{m+1}.e_{h-1}$$

toujours avec la convention $e_{-1} = 0$. On en déduit que l'image de $\Xi_\lambda^{(j)}$ par $(a-(\lambda+q).b)$ est l'hyperplan de $b.\Xi_\lambda^{(j)}$ donné par l'annulation du coefficient de $b^{q+1}.e_j$ et que son noyau est $\mathbb{C}.b^q.e_0$. On conclut aisément. $\blacksquare$

Remarque. Si l'on part d'un élément de $b.\Xi_\lambda^{(j)}$ pour lequel le coefficient de $b^{q+1}.e_j$ vaut ρ, alors le coefficient de $b^q.e_{j+1}$ dans son image par l'application inverse sera égal à ρ. En particulier, il sera non nul quand $\rho \neq 0$. $\square$

Preuve du théorème 4.1.10. Le problème est local et on peut donc supposer que l'on a une application holomorphe $k-$thématique $\psi : X \to \Xi_\lambda^{(k-2)}$ telle que $\mathbb{E}_\psi$ donne l'holomorphie de la famille $F_{k-1}(\sigma))_{\sigma\in X}$. Il n'est pas restrictif, quitte à multiplier ψ par un inversible de $\mathcal{O}(X)[[b]]$, de supposer que l'on a

$$\psi(\sigma) = b^{\lambda_{k-1}-\lambda}.e_{k-2} \quad modulo \quad \Xi_\lambda^{(k-3)}.$$

Posons $q := \lambda_k - \lambda, S_{k-1} := 1 + s_{k-1}.b^{p_{k-1}}$, et définissons

$$\varphi : X \to \Xi_\lambda^{(k-1)}$$

en composant l'application holomorphe $S_{k-1}.\psi$ avec l'inverse de l'application inverse construite dans le lemme pour $j := k-2$ et l'inclusion évidente de l'espace de Frechet $H(k-2,\lambda_k-\lambda) \oplus \mathbb{C}.b^{\lambda_k-\lambda}.e_{k-1}$ dans $\Xi_\lambda^{(k-1)}$, en remarquant que l'on a

$\psi(\sigma) \in b.\Xi_\lambda^{(k-2)}$ pour chaque $\sigma \in X$, puisque l'on a $F_{k-1}(\sigma) \subset a.E(\sigma)+b.E(\sigma)$, que $a.\Xi_\lambda^{(j)} \subset b.\Xi_\lambda^{(j)}$ pour tout $j \geq 0$, et que toute application $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaire de $F_{k-1}(\sigma)$ dans Ξ est restriction d'une application $\tilde{\mathcal{A}}-$linéaire de $E(\sigma)$ dans Ξ[9].
On remarquera enfin que le coefficient de $b^{\lambda_k-\lambda}.e_{k-2}$ dans $S_{k-1}.\psi$ coïncide avec celui de $b^{p_{k-1}}$ dans S_{k-1}, c'est-à-dire est égal à s_{k-1}. Il est donc non nul pour chaque $\sigma \in X$, ce qui montre que le coefficient de $b^{\lambda_k-\lambda}.e_{k-1}$ dans $\varphi(\sigma)$ est non nul pour chaque $\sigma \in X$, grâce à la relation $\lambda_k = \lambda_{k-1} + p_{k-1} - 1$ qui implique $\lambda_k - \lambda + 1 = \lambda_{k-1} - \lambda + p_{k-1}$. Ceci est évidemment nécessaire pour que $E(\sigma)$ soit un thème de rang k. ■

4.1.4 Le théorème de dualité.

Proposition 4.1.12 (Décalage) *Soit* $(E(\sigma))_{\sigma\in X}$ *une famille holomorphe de thèmes* $[\lambda]-$*primitifs. Soit* $\delta \in \mathbb{Q}$ *tel que* $E(\sigma) \otimes_{a,b} E_\delta$ *soit un thème pour chaque* $\sigma \in X$*. Alors la famille* $E(\sigma) \otimes_{a,b} E_\delta$ *est une famille holomorphe. En particulier pour* $r \in \mathbb{Z}$ *tel que pour tout* $\sigma \in X$ $b^r.E(\sigma)$ *soit un thème, alors* $(b^r.E(\sigma))_{\sigma\in X}$ *est une famille holomorphe.*

PREUVE. On rappelle que le (a,b)-module $E \otimes_{a,b} E_\delta$ est le (a,b)-module obtenu en remplaçant l'action de a par $a + \delta.b$. Donc la condition pour que les $E(\sigma)$ soient géométriques[10] est que $\lambda_1 + \delta > k - 1$. C'est-à-dire que $\delta > -\lambda_1 + k - 1$. Comme $\lambda_1 - k + 1 > 0$ ceci a lieu en particulier pour tout $\delta \in \mathbb{Q}^+$.
La démonstration de la proposition est triviale. ■

Théorème 4.1.13 (Théorème de dualité) *Soit* $(E(\sigma))_{\sigma\in X}$ *une famille holomorphe de thèmes* $[\lambda]-$*primitifs. Soit* $\delta \in \mathbb{Q}$ *un rationnel assez grand pour que chaque* $E(\sigma)^* \otimes_{a,b} E_\delta$ *soit un thème. Alors la famille* $((E(\sigma)^* \otimes E_\delta)_{\sigma\in X}$ *est holomorphe.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.1.13. Nous allons faire une récurrence sur le rang des thèmes de la famille holomorphe considérée. Comme en rang 1 et 2 le théorème est déjà démontré (voir la remarque qui suit la définition 4.1.8), supposons le théorème démontré en rang $k - 1 \geq 2$ et montrons-le en rang k.
Soit $(F_1(\sigma))_{\sigma\in X}$ la famille des sous-thèmes normaux de rang 1 des thèmes $(E(\sigma))_{\sigma\in X}$. Il résulte du iv) de la proposition 4.1.9 que la famille $(E(\sigma)/F_1(\sigma))_{\sigma\in X}$ est une famille holomorphe de thèmes.

[9] Ceci résulte de l'exactitude de

$$0 \to Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(E/F_{k-1}, \Xi) \to Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(E, \Xi) \to Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(F_{k-1}, \Xi) \to 0$$

qui est un phénomène général pour les suites exactes de (a,b)-modules géométriques (voir [B.05]).
[10] qui est la seule condition qui peut ne pas être réalisée pour avoir un thème.

De même, il résulte de la proposition 4.1.9 que la famille $(F_2(\sigma))_{\sigma\in X}$ est holomorphe. L'hypothèse de récurrence donne alors que, pour $\delta \in \mathbb{Q}$ assez grand, les familles de thèmes $\big((E(\sigma)\big/F_1(\sigma))^* \otimes_{a,b} E_\delta\big)_{\sigma\in X}$ et $\big((F_2(\sigma))^* \otimes E_\delta\big)_{\sigma\in X}$ sont holomorphes. Mais alors le critère d'holomorphie 4.1.10 s'applique à la famille de thèmes $\big((E(\sigma)^* \otimes_{a,b} E_\delta\big)_{\sigma\in X}$ puisque la famille des sous-thèmes de rang $k-1$ associée est précisément la famille $\big((E(\sigma)\big/F_1(\sigma))^* \otimes_{a,b} E_\delta\big)_{\sigma\in X}$ et que la famille des quotients de rang 2 associée est précisément la famille $\big((F_2(\sigma))^* \otimes_{a,b} E_\delta\big)_{\sigma\in X}$.
■

4.2 Familles standards de thèmes $[\lambda]-$primitifs.

Nous fixerons dans ce paragraphe $\lambda_1 \in k-1+\mathbb{Q}^{*+}$ et les entiers $p_1,\dots,p_{k-1}$. Pour $j \in [1,k-1]$ nous définirons l'ouvert affine $W_j \subset V_j$ de l'espace vectoriel V_j défini dans la proposition 3.3.1 de la façon suivante :

si $p_j+\cdots+p_{k-1} < k-j$

$$W_j := \{S_j \in \mathbb{C}[b] \ / \ S_j(0)=1,\ \deg(S_j) \leq k-j-1 \quad \text{et} \quad \text{coeff } b^{p_j} \neq 0\} \qquad (@)$$

si $p_j+\cdots+p_{k-1} \geq k-j$ définissons l'entier $q_j \geq k-j$ comme le plus petit entier de la forme $p_j+\cdots+p_{j+h}$ qui vérifie $p_j+\cdots+p_{j+h} \geq k-j$, et posons

$$W_j := \{S_j \in \mathbb{C}[b] \ / \ S_j(0)=1, S_j \in \sum_{h=0}^{k-j-1} \mathbb{C}\,.b^h + \mathbb{C}\,.b^{q_j} \quad \text{et} \quad \text{coeff } b^{p_j} \neq 0\} \quad (@@)$$

Posons alors

$$\mathcal{S}(\lambda_1,p_1,\dots,p_{k-1}) := \{(S_1,\dots,S_{k-1}\big/ \ S_j \in W_j \quad \forall j \in [1,k-1]\}.$$

Pour $\sigma \in \mathcal{S}(\lambda_1,p_1,\dots,p_{k-1})$ notons $E(\sigma)$ le thème $[\lambda]-$primitif d'invariants fondamentaux $(\lambda_1,p_1,\dots,p_{k-1})$ défini par

$$E(\sigma) := \tilde{\mathcal{A}}\big/\tilde{\mathcal{A}}.P(\sigma) \quad \text{avec} \qquad (\sigma)$$
$$P(\sigma) := (a-\lambda_1.b).S_1^{-1}\cdots S_{k-1}^{-1}.(a-\lambda_k.b) \qquad (\sigma')$$

où nous avons posé $\sigma := (S_1,\dots,S_{k-1})$.

Définition 4.2.1 *Nous appellerons* **famille standard d'invariants fondamentaux** $(\lambda_1,p_1,\dots,p_{k-1})$ *la famille* $E(\sigma)_{\sigma\in\mathcal{S}(\lambda_1,p_1,\dots,p_{k-1})}$.

Exemple. Pour $k = 1$ chaque $\lambda_1 \in \mathbb{Q}^{+*}$ la famille standard associée est réduite au thème E_{λ_1}.
Pour $k = 2$, et les invariants fondamentaux (λ_1, p_1) on a

i) Pour $p_1 = 0$, $\mathcal{S}(\lambda_1, p_1) = \{1\}$ et le thème correspondant est $E := \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.(a - \lambda_1.b).(a - (\lambda_1 - 1).b$.

ii) Pour $p_1 \geq 1$ on a $\mathcal{S}(\lambda_1, p_1) = \{1 + \alpha.b^{p_1}, \alpha \in \mathbb{C}^*\}$ et le thème associé à α est $E = \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.(a - \lambda_1.b).(1 + \alpha.b^{p_1})^{-1}.(a - (\lambda_1 + p_1 - 1).b)$. □

Théorème 4.2.2 *Quelques soient les invariants fondamentaux fixés, la famille de thèmes paramétrée par $\mathcal{S}(\lambda_1, p_1, \dots, p_{k-1})$ est holomorphe.*

Démonstration. Ce théorème s'obtient immédiatement à partir de la proposition 4.1.10 par une récurrence sur le rang grâce au théorème de dualité et à la proposition de décalage. En effet, la famille $\mathbb{E}/\mathbb{F}_1$ correspond à la famille de thèmes paramétrée par $\mathcal{S}(\lambda_2, p_2, \dots, p_{k-1})$ qui est holomorphe par hypothèse de récurrence, et la famille $\mathbb{F}_2$ correspond soit à la famille constante $\mathcal{S}(\lambda_1, p_1 = 0)$ soit au cas traité au lemme 4.1.6. On conclut en appliquant la proposition 4.1.10 à la famille duale suffisamment décalée et en utilisant à nouveau le théorème de dualité 4.1.13 et la proposition de décalage 4.1.12. ■

4.3 Les déformations standards sont verselles.

Commençons par deux définitions.

Définition 4.3.1 *Soit X un espace complexe réduit et soit $\mathbb{E}$ un faisceau sur X de $\mathcal{O}_X - (a,b)-$modules. Soit $f : Y \to X$ une application holomorphe d'un espace complexe réduits Y dans X. On appellera* **image réciproque de $\mathbb{E}$ par f**, *noté $f^*\mathbb{E}$, le faisceau de $\mathcal{O}_Y - (a,b)-$modules défini comme suit :*

Si $\mathbb{E}$ est $\mathcal{O}_X[[b]]-$libre de rang p sur l'ouvert U et de base $e_1, \dots, e_p$, alors $f^*\mathbb{E}$ est $\mathcal{O}_Y[[b]]-$libre de rang p sur l'ouvert $f^{-1}(U)$ et de base $f^*e_1, \dots, f^*e_p$. L'application a sur un tel ouvert est définie par la formule

$$a.f^*e_j = \sum_{i=1}^{p} f^*S_{i,j}.f^*e_i$$

si l'on a sur l'ouvert U la formule $a.e_j = \sum_{i=1}^{p} S_{i,j}.e_i$. Ici les $S_{i,j}$ sont dans $\mathcal{O}_X(U)[[b]]$ et f^*S pour $S \in \mathcal{O}_X(U)[[b]]$ désigne l'élément de $\mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)[[b]]$ déduit de $S := \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu.b^\nu$ via la formule $f^*S = \sum_{\nu=0}^{\infty} f^*s_\nu.b^\nu$.

Définition 4.3.2 *Soit X un espace complexe réduit et soit $\mathbb{E}$ une famille holomorphe de thèmes $[\lambda]-$primitifs paramétrée par X. Soit $x_0 \in X$. On dira que la famille E est* **verselle** *au voisinage de x_0 si la condition suivante est réalisée :*

- *Pour toute famille holomorphe $\mathbb{G}$ de thèmes $[\lambda]-$primitifs paramétrée par un espace complexe réduit Y telle que le thème $G(y_0)$ soit isomorphe à $E(x_0)$, il existe un voisinage ouvert U de y_0 dans Y, un voisinage ouvert V de x_0 dans X, une application holomorphe $f : U \to V$ telle que les faisceaux de $\mathcal{O}_Y - (a,b)-$modules $f^*\mathbb{E}_{|U}$ et $\mathbb{G}_{|U}$ soit isomorphes.*

Quand l'application f est unique sur un voisinage ouvert assez petit de x_0, on dira que la famille est **universelle** *au voisinage de x_0.*
Une famille verselle (resp. universelle) au voisinage de chaque point de X sera dite **verselle** *(resp.* **universelle** *).*

Voici le théorème principal de ce paragraphe.

Théorème 4.3.3 *Pour tout choix d'invariants fondamentaux $\lambda_1, p_1, \dots, p_{k-1}$ la famille standard de thèmes $[\lambda]-$primitifs paramétrée par $S(\lambda_1, p_1, \dots, p_{k-1})$ est verselle.*

Démonstration. Nous allons montrer ce résultat par récurrence sur k. Les cas $k = 1$ et $k = 2$ ont déjà été traités (voir 4.1.2). Supposons donc $k \geq 3$ et le cas $k-1$ établi.Précisons que l'assertion étant locale, il nous suffit de prouver l'assertion au voisinage d'un point donné de X.
Notons $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{E}$ le sous-faisceau de $\mathcal{O}_X - (a,b)-$modules donnant la famille holomorphe des sous-thèmes normaux de rang 1 de la famille E. Alors le faisceau $\mathbb{E}/\mathbb{F}_1$ est une famille holomorphe de thème $[\lambda]-$primitifs de rang $k-1$ et d'invariants fondamentaux $\lambda_2, p_2, \dots, p_{k-1}$, où $\lambda_2 = \lambda_1 + p_1 - 1$.
L'hypothèse de récurrence nous fournit alors, localement sur X une application holomorphe $f : X \to S(\lambda_2, p_2, \dots, p_{k-1})$ telle que l'image réciproque par f de la famille standard associée soit isomorphe à la famille $\mathbb{E}/\mathbb{F}_1$.
Comme tout ceci est local au voisinage d'un point x_0 de X que l'on suppose fixé, on peut supposer que la famille holomorphe $\mathbb{E}$ est donnée par une application holomorphe $k-$thématique $\varphi : X \to \Xi_\lambda^{(k-1)}$ vérifiant

$$\varphi(x) = s^{\lambda_k - 1}.\frac{(Log\, s)^{k-1}}{(k-1)!} + \psi(x)$$

où ψ est holomorphe à valeurs dans $\Xi_\lambda^{(k-2)}$.
L'application holomorphe f nous fournit en fait des applications holomorphes $S_2, \dots, S_{k-1} : X \to \mathbb{C}[[b]]$ vérifiant $S_j(0) \equiv 1$ et telles que, si l'on pose

$$P_1 := (a - \lambda_2.b).S_2^{-1} \dots S_{k-1}^{-1}.(a - \lambda_k.b)$$

on ait $P_1.e = 0$ pour le générateur standard e de la famille standard paramétrée par $S(\lambda_2, p_2, \dots, p_{k-1})$. Donc le générateur f^*e de $\mathbb{E}\big/\mathbb{F}_1$ vérifie également $P_1.f^*e = 0$ dans $\mathbb{E}\big/\mathbb{F}_1$. En identifiant $\mathbb{E}$ et son image par φ dans $\mathcal{O}_X \widehat{\otimes}\, \Xi_\lambda^{(k-1)}$ et $\mathbb{F}_1$ avec $\mathbb{E} \cap \mathcal{O}_X \widehat{\otimes}\, \Xi_\lambda^{(0)}$, on identifie alors $\mathbb{E}\big/\mathbb{F}_1$ à un sous faisceau du faisceau quotient

$$\mathcal{O}_X \widehat{\otimes}\, \Xi_\lambda^{(k-1)}\big/\mathcal{O}_X \widehat{\otimes}\, \Xi_\lambda^{(0)} \simeq \mathcal{O}_X \widehat{\otimes}\, \Xi_\lambda^{(k-2)}.$$

On peut donc trouver $T_0, \dots, T_{k-1}$ des sections locales de $\mathcal{O}_X[[b]]$ telles que l'image de la section

$$\sigma := \sum_{j=0}^{k-1} T_j.a^j.\varphi$$

dans $\mathbb{E}\big/\mathbb{F}_1$ soit f^*e. De plus comme f^*e engendre $\mathbb{E}\big/\mathbb{F}_1$ la section T_0 devra être un inversible de $\mathcal{O}_X[[b]]$ au voisinage de x_0, sinon la valeur en x_0 est dans $a.E(x_0) + b.E(x_0)$ et son image ne peut engendrer $E(x_0)\big/F_1(x_0)$. Alors la section σ engendre localement $\mathbb{E}$ et vérifiera

$$P_1.\sigma \in \mathbb{F}_1.$$

Mais on sait que $\mathbb{F}_1 = \mathcal{O}_X[[b]] \otimes s^{\lambda_1 - 1}$, ce qui permet d'écrire

$$P_1.\sigma = \Theta_1.s^{\lambda_1 - 1}$$

où Θ_1 est une section locale de $\mathcal{O}_X[[b]]$. La décomposition

$$\mathcal{O}_X \widehat{\otimes}\, E_{\lambda_1} = P_1.(\mathcal{O}_X \widehat{\otimes}\, E_{\lambda_1}) \oplus (\mathcal{O}_X \otimes V_1)$$

permet alors d'écrire $\Theta_1.s^{\lambda_1-1} = P_1.\alpha + S_1.s^{\lambda_1-1}$ où α est une section locale de $\mathbb{F}_1$ et S_1 une section locale de $\mathcal{O}_X \otimes V_1$. De plus l'inversibilité de Θ_1 assure l'inversibilité de S_1 dans $\mathcal{O}_X[[b]]$, c'est à dire l'inversibilité de son terme constant en b dans $\mathcal{O}_X$. Donc quitte à multiplier σ et α par un inversible I de $\mathcal{O}_X$, on pourra supposer que le terme constant en b de S_1 est identiquement égal à 1.
Alors $\tau := I.(\sigma - \alpha)$ est encore un générateur local de $\mathbb{E}$ et il vérifie

$$P_1.\tau = S_1.s^{\lambda_1-1} \quad \text{avec} \quad S_1 \in \mathcal{O}_X \otimes V_1, S_1(0) \equiv 1$$

ce qui donne $(a - \lambda_1.b).S_1^{-1}.P_1.\tau = 0$. On constate alors que $\mathbb{E}$ est isomorphe à l'image réciproque de la famille standard par l'application g donnée au voisinage de x_0 par $S_1, \dots, S_{k-1}$, en envoyant le générateur local τ sur l'image réciproque g^*e du générateur standard e de la famille paramétrée par $S(\lambda_1, p_1, \dots, p_{k-1})$. En effet si $P_0 := (a - \lambda_1.b).S_1^{-1}.P_1$ on aura $P_0.\tau = 0$ ainsi que $P_0.g^*e = 0$, puisque $P_0.e = 0$. ■

Corollaire 4.3.4 *Soient $\lambda_1, p_1, \dots, p_{k-1}$ les invariants fondamentaux d'un thème $[\lambda]-$primitif. Si tout thème admettant ces invariants fondamentaux est stable, la famille standard associée à ces invariants fondamentaux est universelle.*

Preuve. Ceci résulte immédiatement du fait que sous notre hypothèse, deux paramètres distincts donnent deux thèmes non isomorphes grâce au théorème 3.3.3. La versalité de la famille standard montrée ci-dessus au théorème 4.3.3 permet alors immédiatement de conclure. ■

4.4 Un contre-exemple.

Nous allons donner un exemple de thèmes de rang 3 pour lesquels il n'existe pas de famille universelle.
On fixe les invariants $\lambda_1, p_1 = p_2 = 1$ pour les thèmes de rang 3 que nous allons considérer maintenant. On a donc $q_1 = 2$ et $q_2 = p_2 = 1$.
Notre objectif est de montrer la proposition suivante.

Proposition 4.4.1 *Il n'existe pas de famille universelle pour les thèmes $[\lambda]-$primitifs de rang 3 d'invariants fondamentaux $\lambda_1, p_1 = p_2 = 1$, au voisinage de chacun des thèmes de paramètres (α, α, γ), avec $\alpha \neq 0$, c'est-à-dire au voisinage de chacun des thèmes stables (spéciaux) de la famille verselle standard.*

La preuve de cette proposition utilisera les trois lemmes suivants.

Lemme 4.4.2 *On considère, pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \alpha.\beta \neq 0$ les thèmes de rang 3 $E_{\alpha,\beta,\gamma}$ définis de la façon suivante :*

$$\begin{aligned}
(a - \lambda.b).e_3 &= (1 + \alpha.b).e_2 \\
(a - \lambda.b).e_2 &= (1 + \beta.b + \gamma.b^2).e_1 \\
(a - \lambda.b).e_1 &= 0.
\end{aligned}$$

Pour $\beta \neq \alpha$, $E_{\alpha,\beta,\gamma}$ est isomorphe à $E_{\alpha,\beta,0}$ quelque soit γ.
Pour $\beta = \alpha$, les thèmes $E_{\alpha,\alpha,\gamma}$ et $E_{\alpha,\alpha,\gamma'}$ sont isomorphes si et seulement si $\gamma = \gamma'$.

Preuve. Cherchons une $\mathbb{C}[[b]]-$base $\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1$ de $E_{\alpha,\beta,\gamma}$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_3 &= e_3 + U.e_2 + V.e_1, \quad \text{avec} \quad U, V \in \mathbb{C}[[b]] && (0) \\
(a - \lambda.b).\varepsilon_3 &= (1 + \alpha.b).\varepsilon_2 && (1) \\
(a - \lambda.b).\varepsilon_2 &= (1 + \beta.b + \gamma'.b^2).\varepsilon_1 && (2) \\
(a - \lambda.b).\varepsilon_1 &= 0. && (3)
\end{aligned}$$

On sait en effet que α et β sont déterminés par la classe d'isomorphisme du thème $E(\alpha, \beta, \gamma)$ puisque l'on a $p_1 = p_2 = 1$; on notera que $q_1 = p_1 + p_2 = 2$. La dernière

égalité (3) impose $\varepsilon_1 = \rho.e_1$ avec $\rho \in \mathbb{C}^*$.
Calculons les conditions imposées à U et V :

$$\begin{aligned}(a-\lambda.b).\varepsilon_3 &= (1+\alpha.b).e_2 + b^2.U'.e_2 + U.(1+\beta.b+\gamma.b^2).e_1 + b^2.V'.e_1\\ &= (1+\alpha.b).\varepsilon_2 \qquad \text{et donc}\\ \varepsilon_2 &= Z.e_2 + T.e_1 \qquad \text{avec}\\ Z &= (1+\alpha.b)^{-1}.(1+\alpha.b+b^2.U') \quad \text{et}\\ (1+\alpha.b).T &= U.(1+\beta.b+\gamma.b^2) + b^2.V' \qquad (4)\end{aligned}$$

On aura alors

$$\begin{aligned}(a-\lambda.b).\varepsilon_2 &= Z.(1+\beta.b+\gamma.b^2).e_1 + b^2.Z'.e_2 + b^2.T'.e_1\\ &= (1+\beta.b+\gamma'.b^2).\rho.e_1\end{aligned}$$

ce qui implique déjà $Z' = 0$ et comme $Z = 1 + (1+\beta.b)^{-1}.b^2.U'$ on doit avoir $U \in \mathbb{C}$, et $Z = 1$. La relation (2) donne maintenant, puisque $\varepsilon_2 = e_2 + T.e_1$

$$(1+\beta.b+\gamma.b^2).e_1 + b^2.T'.e_1 = (1+\beta.b+\gamma'.b^2).\rho.e_1$$

ce qui impose $\rho = 1$ et $T' = \gamma' - \gamma$. On aura donc $T = U + (\gamma' - \gamma).b$ en identifiant les termes constants de (4). Cette égalité (4) impose de plus

$$\begin{aligned}\alpha.U + \gamma' - \gamma &= U.\beta \qquad \text{et} \qquad (5)\\ U.\gamma + V' &= \alpha.(\gamma - \gamma')\end{aligned}$$

On en déduit que pour $\alpha \neq \beta$ on aura

$$U = \frac{\gamma - \gamma'}{\alpha - \beta} \quad \text{et} \quad V = V_0 + \frac{\gamma' - \gamma}{\beta - \alpha}.\big(\alpha.(\beta - \alpha) - \gamma\big).b.$$

Si $\beta = \alpha$, la relation (5) impose $\gamma = \gamma'$. ■

Pour $(\alpha, \beta) \in X := \{(\alpha, \beta) \in (\mathbb{C}^*)^2, \alpha \neq \beta\}$ notons $E(\alpha, \beta)$ le thème de rang 3 défini par $E(\alpha, \beta) := \tilde{\mathcal{A}}\big/\tilde{\mathcal{A}}.(a-\lambda.b)(1+\beta.b)^{-1}(a-\lambda.b)(1+\alpha.b)^{-1}(a-\lambda.b)$.

Lemme 4.4.3 *Il n'existe pas d'endomorphisme de rang 2 de $E(\alpha, \beta)$ pour $\alpha \neq \beta$.*

Preuve. Il nous suffit de montrer qu'il n'existe pas d'élément $x := e_2 + U.e_1$ dans $E(\alpha, \beta)$ vérifiant $(a-\lambda.b)(1+\alpha.b)^{-1}(a-\lambda.b).x = 0$, où $U \in \mathbb{C}[[b]]$. Comme les éléments de $E(\alpha, \beta)$ annulés par $(a-\lambda.b)$ sont de la forme $\rho.e_1$ avec $\rho \in \mathbb{C}$, un tel x doit vérifier

$$(a-\lambda.b)x = \rho.(1+\alpha.b).e_1$$

ce qui impose à U de vérifier la relation

$$(1+\beta.b) + b^2.U' = \rho.(1+\alpha.b).$$

On en conclut que l'on doit avoir $\rho = 1$ et donc $\alpha = \beta$. ■

Par contre, pour $\alpha = \beta \neq 0$ et γ arbitraire on a stabilité .

Lemme 4.4.4 *Pour $\alpha \neq 0$ le (a,b)-module $E_{\alpha,\alpha,\gamma}$ est un thème stable de rang 3.*

Preuve. Il nous suffit de montrer qu'il existe $x := e_2 + U.e_1$ vérifiant

$$(a - \lambda.b)(1 + \alpha.b)^{-1}(a - \lambda.b).x = 0,$$

où $U \in \mathbb{C}[[b]]$. Comme F_2 est un thème, les éléments de F_2 annulés par $(a - \lambda.b)$ sont de la forme $\rho.e_1, \rho \in \mathbb{C}$. Donc x doit vérifier

$$(a - \lambda.b)x = \rho.(1 + \alpha.b).e_1$$

ce qui impose à U de vérifier la relation

$$(1 + \beta.b + \gamma.b^2) + b^2.U' = \rho.(1 + \alpha.b).$$

On en conclut que l'on doit avoir $\rho = 1$ et $U = -\gamma.b + cste$. On a donc une solution $x := e_2 - \gamma.b.e_1$. ■

Preuve de la proposition 4.4.1. Le fait que les thèmes stables de la famille standard considérée sont exactement les $E_{\alpha,\alpha,\gamma}$ est démontré dans les lemmes 4.4.3 et 4.4.4.
La famille $(E_{\alpha,\beta,\gamma})_{(\alpha,\beta,\gamma)\in S(\lambda_1,p_1=p_2=1)}$ est une famille holomorphe et même verselle en chaque point d'après le théorème 4.3.3. Supposons trouvée une famille universelle $(E_y)_{y\in Y}$ au voisinage du thème $E(\alpha_0, \alpha_0, \gamma_0) \simeq E_{y_0}$, où Y est un espace complexe réduit que l'on peut supposer plongé dans $\mathbb{C}^n$ au voisinage de y_0. Considérons alors l'application holomorphe $\varphi : \Omega \to Y \hookrightarrow \mathbb{C}^N$ classifiant la famille standard sur un voisinage ouvert Ω de $(\alpha_0, \alpha_0, \gamma_0) \in (\mathbb{C}^*)^2 \times \mathbb{C}$. Comme pour $\alpha \neq \beta$ la classe d'isomorphisme de $E_{\alpha,\beta,\gamma}$ ne dépend pas de γ d'après le lemme 4.4.2, on aura $\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma} \equiv 0$ sur l'ouvert $\{\alpha \neq \beta\}$ de Ω. Ceci impose à φ d'être indépendante de γ ce qui donnerait l'isomorphisme entre $E_{\alpha,\alpha,\gamma}$ et $E_{\alpha,\alpha,\gamma'}$ pour tout α assez voisin de α_0 et tout γ, γ' assez voisins de γ_0. Ceci contredit le lemme 4.4.2. ■

Corollaire 4.4.5 *La famille $E(\alpha, \beta)_{(\alpha,\beta)\in X}$ est universelle en chaque point de $X := (\mathbb{C})^* \setminus \{\alpha = \beta\}$.*

Preuve. Notons $\mathbb{E}$ le faisceau sur X de $\mathcal{O}_X - (a, b)-$module associé à la famille holomorphe des $E(\alpha, \beta)$. Il nous suffit en fait de montrer que l'application holomorphe

$$\pi : X \times C \to X$$

définie par $\pi(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, \beta)$ vérifie bien que $\pi^*(\mathbb{E})$ est un faisceau de $\mathcal{O}_{X\times\mathbb{C}} - (a, b)-$modules isomorphe au faisceau associé à la famille standard paramétrée par $X \times \mathbb{C}$. Mais l'isomorphisme (inverse) de l'isomorphisme cherché est donné par le calcul du lemme 4.4.2 qui nous fournit, dans le cas $\gamma' = 0$, où (α, β, γ) est considéré comme paramètre holomorphe dans $X \times \mathbb{C}$, des sections holomorphes U, V de $\mathcal{O}_{X\times\mathbb{C}}[[b]]$. L'isomorphisme (inverse) de l'isomorphisme cherché est obtenu en envoyant le générateur e_3 de la famille standard sur $\varepsilon_3(\gamma' = 0) := e_3+U.e_2+V.e_1$, qui est le générateur de la famille $\pi^*(\mathbb{E})$. ■

5 Appendices.

5.1 Un lemme.

Le résultat suivant jouant un rôle clef dans la construction des bases standards, et donc dans la construction des familles verselles de thèmes primitifs, nous en donnons ici les grandes lignes de la preuve pour la commodité du lecteur.

Lemme 5.1.1 *Soient E et F deux (a,b)-modules réguliers. Alors on a*

$$\dim_{\mathbb{C}}(Ext^1_{\tilde{\mathcal{A}}}(E,F)) - \dim_{\mathbb{C}}(Ext^0_{\tilde{\mathcal{A}}}(E,F)) = rg(E).rg(F).$$

Preuve. Commençons par montrer le cas où $rg(E) = 1$.
On a alors $E \simeq \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.(a - \lambda.b)$ et donc $Ext^0_{\tilde{\mathcal{A}}}(E,F)$ et $Ext^1_{\tilde{\mathcal{A}}}(E,F)$ sont respectivement les noyaux et conoyaux de $a - \lambda.b : F \to F$. Montrons alors la formule par récurrence sur le rang de F. En rang 1 on a $F \simeq \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{A}}.(a - \mu.b)$, et le calcul est élémentaire :

1. Pour $\lambda \not\in \mu + \mathbb{N}$ on a $Ext^0_{\tilde{\mathcal{A}}}(E,F) = \{0\}$ et $Ext^1_{\tilde{\mathcal{A}}}(E,F) \simeq \mathbb{C}.e_\mu$.
2. On a $Ext^0_{\tilde{\mathcal{A}}}(E,F) = \mathbb{C}.b^n.e_\mu$ et $Ext^1_{\tilde{\mathcal{A}}}(E,F) \simeq \mathbb{C}.e_\mu \oplus \mathbb{C}.b^{n+1}.e_\mu$ pour $\lambda = \mu + n$.

D'où l'assertion dans ce cas.
Faisons une récurrence sur l'entier $rg(F)$.
Si $rg(F) \geq 2$, on a une suite exacte

$$0 \to G \to F \to E_\mu \to 0$$

avec $rg(G) = rg(F) - 1$ qui donnera la suite exacte d'espaces vectoriels de dimensions finies (d'après le théorème 1 de [B.95])

$$\begin{aligned} 0 \to Ext^0_{\tilde{\mathcal{A}}}(E,G) \to Ext^0_{\tilde{\mathcal{A}}}(E,F) \to Ext^0_{\tilde{\mathcal{A}}}(E,E_\mu) \to \\ \to Ext^1_{\tilde{\mathcal{A}}}(E,G) \to Ext^1_{\tilde{\mathcal{A}}}(E,F) \to Ext^1_{\tilde{\mathcal{A}}}(E,E_\mu) \to 0 \end{aligned}$$

qui donne que la somme alternée des dimensions est nulle, ou encore

$$\begin{aligned} &\dim(Ext^1_{\tilde{\mathcal{A}}}(E,G)) - \dim(Ext^0_{\tilde{\mathcal{A}}}(E,G)) + \dim(Ext^1_{\tilde{\mathcal{A}}}(E,E_\mu)) - \dim(Ext^0_{\tilde{\mathcal{A}}}(E,E_\mu)) = \\ &\dim(Ext^1_{\tilde{\mathcal{A}}}(E,F)) - \dim(Ext^1_{\tilde{\mathcal{A}}}(E,F)) = (rg(F) - 1) + 1 = rg(F) \end{aligned}$$

grâce à l'hypothèse de récurrence.
Le cas où E est arbitraire et F est de rang 1 s'obtient de façon analogue.
Enfin une récurrence maintenant sur l'entier $rg(E) + rg(F)$ donne le cas général, à nouveau par un raisonnement analogue. ■

5.2 Exemple

Les inégalités du théorème 3.1.2 sont précises puisque dans l'exemple ci-après le thème $E' := E\big/F_1$ de rang 3, ne s'injecte pas dans F_3 puisque E n'est pas stable, alors que l'on a $\mu_i - \lambda_i \geq 3 - 2 = 1$ (et même $\mu_2 - \lambda_2 = k - 1 = 2$) pour ces deux thèmes.

Je détaille l'exemple suivant : $k = 4$, $p_1 = p_3 = 2$ et $p_2 = 3$. On a donc $q_1 = 5, q_2 = p_2 = 3$ et $q_3 = p_3 = 2$. On pose $E := \tilde{\mathcal{A}}\big/\tilde{\mathcal{A}}.P$ avec

$$P := (a - \lambda_1.b)S_1^{-1}.(a - \lambda_2.b).S_2^{-1}.(a - \lambda_3.b).S_3^{-1}.(a - \lambda_4.b)$$

$$\begin{aligned} S_1 &:= 1 + \delta.b + \varepsilon.b^2 + \theta.b^5 \\ S_2 &:= 1 + \beta.b + \gamma.b^3 \\ S_3 &:= 1 + \alpha.b^2 \quad \text{et} \quad \alpha.\gamma.\varepsilon \neq 0 \end{aligned}$$

Lemme 5.2.1 *L'espace vectoriel* $Hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(E, E)$ *est de dimension* 3*, si l'on a* $\alpha + \varepsilon \neq 0$.

PREUVE. On a un homomorphisme (unique à un scalaire multiplicatif non nul près) de rang 1 de E dans E : il envoie le générateur e d'annulateur $\tilde{\mathcal{A}}.P$ sur $z_1 := b^{\lambda_4 - \lambda_1}.e_1$ où e_1 est un générateur de F_1 vérifiant $(a - \lambda_1.b).e_1 = 0$. En effet z_1 est annulé par P, l'élément e_1 est unique à un scalaire multiplicatif près, et l'image d'un homomorphisme de rang 1 est de normalisé égal à F_1. Comme c'est un quotient de E de rang 1 il est isomorphe à $E\big/F_3 \simeq E_{\lambda_4}$.

L'espace vectoriel des homomorphismes de rang 4 modulo ceux de rang 3 est de dimension 1 et engendré par l'identité.

Cherchons maintenant la dimension de l'espace vectoriel des homomorphismes de rang 2 modulo ceux de rang ≤ 1. Un tel homomorphisme a son image dans F_2 puisque le normalisé de l'image est F_2, il est donc donné par un élément $z_2 \in F_2 \setminus F_1$ qui est annulé par P. D'après le lemme 2.2.4, z_2 vérifie alors

$$(a - \lambda_4.b).z_2 \in F_1 \quad \text{et} \quad (a - \lambda_3.b).S_3^{-1}.(a - \lambda_4.b).z_2 = 0$$

et il est donc de la forme

$$z_2 := \rho.b^{\lambda_4 - \lambda_2}.e_2 + U.e_1$$

où $U \in \mathbb{C}[[b]]$. On a alors

$$\begin{aligned} (a - \lambda_4.b).z_2 &= b^{\lambda_4 - \lambda_2} S_1.e_1 + (\lambda_1 - \lambda_4).b.U.e_1 + b^2.U'.e_1 \\ (a - \lambda_4.b).z_2 &= \sigma.b^{\lambda_3 - \lambda_1}.S_3.e_1. \end{aligned}$$

On doit donc avoir

$$b^2.U' - 4b.U = \sigma.S_3.b^3 - \rho.S_1.b^3.$$

Après simplification par b on obtient une équation qui n'a de solution $U \in \mathbb{C}[[b]]$ que si le coefficient de b^4 dans $\sigma.S_3.b^2 - \rho.S_1.b^2$ est nul. Ceci impose la relation

$$\sigma.\alpha = \rho.\varepsilon.$$

Comme $\alpha, \rho, \varepsilon$ sont non nuls, on a un choix (unique pour $\rho \in \mathbb{C}^*$ donné) qui est non nul pour σ. On a alors une solution unique pour U modulo $\mathbb{C}.b^4$.
On en conclut que l'espace vectoriel des homomorphismes de rang ≤ 2 est de dimension 2.

Pour achever la preuve du lemme, il suffit de montrer que sous nos hypothèses, il n'existe pas d'homomorphisme de rang 3 de E dans E. Ceci revient à montrer qu'il n'existe pas d'élément

$$z_3 = b^{\lambda_4 - \lambda_3}.e_3 + V.e_2 + W.e_1$$

avec $V, W \in \mathbb{C}[[b]]$, vérifiant

$$(a - \lambda_4.b).z_3 = S_3.x_2 \quad \text{avec} \quad (a - \lambda_2.b).S_2^{-1}.(a - \lambda_3.b).x_2 = 0, \ x_2 \in F_2 \setminus F_1.$$

Posons $x_2 := \tau.b^{\lambda_3 - \lambda_2}.e_2 + Z.e_1$ avec $\tau \neq 0$ et $Z \in \mathbb{C}[[b]]$. Alors on a

$$(a - \lambda_3.b).x_2 = \tau.b^{\lambda_3 - \lambda_2}.S_1.e_1 + b^2.Z'.e_1 - (\lambda_3 - \lambda_1).Z.b.e_1 = \eta.S_2.b^{\lambda_2 - \lambda_1}.e_1.$$

On a donc

$$b.Z' - 3Z = \eta.S_2 - \tau.S_1.b.$$

Cette équation n'aura de solution $Z \in \mathbb{C}[[b]]$ que si le coefficient de b^3 dans le membre de droite est nul. Ceci impose la condition $\eta.\gamma = \tau.\varepsilon$. On aura alors $-3Z(0) = \eta$ pour chaque solution Z, puisqu'elle est unique modulo $\mathbb{C}.b^3$.

Calculons

$$\begin{aligned}(a - \lambda_4.b).z_3 = b^{p_3 - 1}.S_2.e_2 + b^2.V'.e_2 + (\lambda_2 - \lambda_4).V.b.e_2 + \\ + V.S_1.e_1 + b^2.W'.e_1 + (\lambda_1 - \lambda_4).W.b.e_1 = S_3.x_2\end{aligned}$$

ce qui donne les équations

$$\begin{aligned} b.V' - 3V &= \tau.S_3.b - S_2 \\ b^2.W' - 4b.W &= S_3.Z - V.S_1 \end{aligned}$$

La première équation n'a de solution que si $\tau.\alpha = \gamma$ et on aura alors $-3V(0) = -1$. La seconde ne peut avoir de solution que si $Z(0) = V(0)$ puisque le membre de gauche est dans $b.\mathbb{C}[[b]]$. Ceci impose $\eta = -1$ et donc $\gamma + \tau.\varepsilon = 0$. On doit donc avoir $\tau = \gamma/\alpha = -\gamma/\varepsilon$ ce qui est impossible pour $\alpha + \varepsilon \neq 0$, puisque $\alpha.\gamma.\varepsilon \neq 0$.
$\blacksquare$

Remarque. On constate que pour $\alpha+\varepsilon=0$, on trouve une solution $W\in\mathbb{C}[[b]]$ car le coefficient de b^5 dans $S_3.Z-V.S_1$ peut être supprimé puisque Z est défini modulo b^3 et que α, le coefficient de b^2 dans S_3, est non nul. Donc pour $\alpha+\varepsilon=0$ le thème E est stable. $\square$

Il est facile de déduire de ce qui précède que la classe d'isomorphisme de E est indépendant de $\theta\in\mathbb{C}$ pour $\alpha+\varepsilon\neq 0$[11]. On a donc une situation analogue à celle décrite au paragraphe 4.4, c'est-à-dire que l'on peut construire une famille universelle pour les thèmes de rang 4 d'invariants fondamentaux $p_1=p_3=2, p_2=3$ tels que $\alpha+\varepsilon\neq 0$, paramétrée par $\{(\alpha,\gamma,\varepsilon),(\beta,\delta)\in(\mathbb{C}^*)^3\times\mathbb{C}^2, \alpha+\varepsilon\neq 0\}$.
Une preuve analogue permet de montrer que près des thèmes (stables, non spéciaux) vérifiant $\alpha+\varepsilon=0$, il n'existe pas de famille universelle.

5.3 Existence d'applications k-thématiques.

D'abord un lemme de géométrie algébrique sur l'algèbre $Z:=\mathbb{C}[[b]]$.

Lemme 5.3.1 *Soit E un (a,b)-module régulier de rang k. Fixons une $\mathbb{C}[[b]]-$base $e_1,\dots,e_k$ de E et considérons E comme l'espace affine Z^k sur la $\mathbb{C}-$algèbre $Z:=\mathbb{C}[[b]]$. Pour chaque entier p le sous-ensemble $X_p\subset E=Z^k$ défini par*

$$X_p:=\{x\in E\ /\ rg(\tilde{\mathcal{A}}.x)\leq p\}$$

est un sous-ensemble algébrique de $E=Z^k$, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble fini de polynômes $P_1,\dots,P_N$ dans $Z[x_1,\dots,x_k]$ tel que l'on ait

$$X_p=\{x\in Z^k\ /\ P_j(x)=0\quad\forall j\in[1,N]\}.$$

Preuve. Comme E est régulier de rang k, pour chaque $x\in E$, le sous-(a,b)-module $\tilde{\mathcal{A}}.x$ est monogène régulier de rang $\leq k$. Il est donc engendré sur $\mathbb{C}[[b]]$ par $\{x,a.x,\dots,a^{k-1}.x\}$. Pour écrire que le rang de $\tilde{\mathcal{A}}.x$ est $\leq p$, il suffit d'écrire que tous les mineurs (q,q) de la matrice de ces k vecteurs dans la base $e_1,\dots,e_k$ sont nuls pour $p+1\leq k$, ce qui fournit les polynômes $P_1,\dots,P_N$ de l'énoncé. $\blacksquare$

Et une conséquence immédiate :

Corollaire 5.3.2 *Soit X un espace complexe réduit et soit E un (a,b)-module régulier de rang k. Soit $f:X\to E$ une application holomorphe*[12]*. On a une stratification finie*

$$X_0\subset X_1\subset\cdots\subset X_k=X$$

par des sous-ensembles analytiques fermés telle que, pour chaque $q\in[1,k]$ le sous-ensemble $X_q\setminus X_{q-1}$ soit exactement l'ensemble des $x\in X$ tels que le rang de $\tilde{\mathcal{A}}.f(x)$ soit égal à q.

[11] Noter que comme $P_1.F_3\cap F_1\subset b^3.F_1$ seul θ peut changer. Et on voit qu' il change effectivement grâce au lemme 3.3.4.

[12] En fixant une base $e_1,\dots,e_k$ c'est une section globale du faisceau $\mathcal{O}_X[[b]]^k$.

Remarque. Le quotient de deux fonctions holomorphes $f : D \to \mathbb{C}[[b]]$ et $g : D \to \mathbb{C}[[b]]$ avec $g(0) \neq 0$ peut être bien défini pour chaque valeur de $z \in D$, sans pour autant que f/g soit holomorphe sur D. Par exemple $z \to \frac{z+b^2}{z+b}$ est bien défini pour chaque valeur de $z \in D$, mais elle n'est cependant pas holomorphe. En effet une relation

$$z + b^2 = (z+b).(\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z).b^j)$$

conduit immédiatement à $a_0 \equiv 1$ et $a_1 = \frac{-1}{z}$! $\square$

Lemme 5.3.3 *Soient $f, g : X \to \mathbb{C}[[b]]$ deux applications holomorphes d'un espace complexe réduit X à valeurs dans $\mathbb{C}[[b]]$. Supposons X irréductible et $g \not\equiv 0$. Supposons que pour chaque $x \in X$ le quotient $f(x)/g(x)$ soit dans $\mathbb{C}[[b]]$. Alors il existe un ouvert de Zariski dense X' de X sur lequel l'application $x \to f(x)/g(x) \in \mathbb{C}[[b]]$ est holomorphe.*

Preuve. On peut supposer que $f \not\equiv 0$ sur X. Il existe alors deux ouverts de Zariski denses X_1 et X_2 tels que sur X_1 (resp. sur X_2) la valuation en b de $f(x)$ (resp. de $g(x)$) soit constante égale à k (resp. à l). La condition imposée montre que l'on a $k \geq l$, et sur $X_1 \cap X_2$ on peut écrire

$$f(x) = b^k.F(x) \quad g(x) = b^l.G(x)$$

où F, G sont des fonctions holomorphes à valeurs inversibles dans $\mathbb{C}[[b]]$. Il ne reste plus qu'à se convaincre que la fonction $x \mapsto b^{k-l}.F(x)/G(x)$ est holomorphe sur $X_1 \cap X_2$, ce qui est élémentaire. $\blacksquare$

Corollaire 5.3.4 *Soit $f : X \to E$ une application holomorphe d'un espace complexe réduit et irréductible dans un (a,b)-module régulier. Il existe un ouvert dense X' de X sur lequel la restriction de f définit une application $k-$thématique via $x \mapsto \tilde{\mathcal{A}}.f(x)$, où $k \leq rg(E)$.*

Preuve. Le point est que l'on trouve un ouvert de Zariski X' sur lequel le rang du (a,b)-module monogène $\tilde{\mathcal{A}}.f(x)$ est constant grâce au premier lemme. On résoud ensuite le système de Cramer avec paramètre sur cet ouvert dense, mais on trouve, pour les fonctions $x \mapsto S_j(x) \in \mathbb{C}[[b]]$ donnant la relation

$$a^k.f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} S_j(x).a^j.f(x)$$

des fonctions méromorphes. Le second lemme donne alors un ouvert de Zariski X'' de X' sur lequel ces fonctions sont holomorphes. $\blacksquare$

Remarque. Dans le corollaire ci-dessus on prendra garde que l'ouvert dense trouvé est un ouvert de Zariski d'un ouvert de Zariski de X, qui n'est pas, en général, un ouvert de Zariski de X. $\square$

6 Références.

- [A-G-V] Arnold,V. Goussein-Zadé, S. Varchenko,A. *Singularités des applications différentiables*, volume 2, édition MIR, Moscou 1985.

- [B. 93] Barlet, D. *Théorie des (a,b)-modules I*, Univ. Ser. Math. Plenum (1993), p. 1-43.

- [B. 97] Barlet, D. *Théorie des (a,b)-modules II. Extensions*, Pitman Res. Notes Math. Ser. 366, Longman (1997), p. 19-59.

- [B. 05] Barlet, D. *Module de Brieskorn et formes hermitiennes pour une singularité isolée d'hypersurface*, Revue Inst. E. Cartan (Nancy) vol. 18 (2005), p. 19-46.

- [B. 09] Barlet, D. *Périodes évanescentes et (a,b)-modules monogènes*, preprint Institut E. Cartan (Nancy) 2009 $n^0 1$, p. 1- 46. A paraître dans le Bulletino U.M.I. (9) II (2009).

- [Br.70] Brieskorn, E. *Die Monodromie der Isolierten Singularitäten von Hyperflächen*, Manuscripta Math. 2 (1970), p. 103-161.

- [M. 75] Malgrange, B. *Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée*, in Lect. Notes in Math. 459, Springer (1975), p.98-119.

- [S. 89] Saito, M. *On the structure of Brieskorn lattices*, Ann. Inst. Fourier 39 (1989), p.27-72.